

На основании проведенных исследований в монографии доказывается факт существования эффекта дисперсионной рефракции; как обобщающий работу результат выводятся уравнения модифицированного варианта пространственно-временной геометрической оптики для линейных сред с частотной дисперсией. В отличие от стандартного подхода, когда в качестве модели поля используется локально-плоская однородная монохроматическая волна, являющаяся точным решением волнового уравнения в однородной среде, мы использовали более адекватную модель плавнонеоднородной волны в виде функции Эйри, которая является точным решением волнового уравнения для задачи рефракции в линейном слое и в нашем случае задается уравнением

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\epsilon_0 \omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial \omega_M}{\partial y} \right) A y = 0.$$

Тем самым, мы не ограничились только двумя членами лучевого ряда (4.2), как это имеет место в стандартной ПВГО и что является причиной систематической ошибки, а дополнительно учли вклад бесконечной суммы амплитудных поправок (4.5), которые и дали результирующую интегральную поправку, значимую для описания рефракции.

Полученное приближение в явном виде описывает эффект дисперсионной рефракции для частотно-модулированных волн, а также корректирует описание обычной рефракции для немодулированных монохроматических волн в диспергирующих средах.

Ниже сведем вместе все полученные уравнения пространственно-временной геометрической оптики для произвольного закона частотной дисперсии, задаваемого волновыми уравнениями (1.1a), (1.2a):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}_g; \\ \mathbf{V}_g &= c^2 \frac{\mathbf{k}}{\epsilon_0 \omega}; \end{aligned}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0;$$

$$\omega_M = \omega^2(\epsilon_0 - \epsilon);$$

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2}{2\epsilon_0^2} \nabla \epsilon_0 + \frac{c^2 \omega_M}{2\epsilon_0^3 \omega^2} \nabla_{\perp} \epsilon_0 - \frac{c^2}{2\epsilon_0^2 \omega^2} \nabla \omega_M +$$

$$+ \frac{c^2 \omega_M}{2\epsilon_0^3 \omega^4} \nabla_{\perp} \omega_M - \frac{c^2 \omega_M}{\epsilon_0^2 \omega^3} \nabla_{\perp} \omega;$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{A_0}{2} \left[ \frac{c^2}{\epsilon_0 \omega} D - \left( \frac{1}{k_x} - \frac{c^2 k_x}{\epsilon_0^2 \omega^2} \right) \Omega_x + \frac{\omega}{2\epsilon_0 k_x} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x} - \frac{1}{2\epsilon_0 \omega k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial x} \right];$$

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{c^2}{\epsilon_0 \omega} \left( \frac{\omega^2}{2c^2 k_x} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2c^2 k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial y} \right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2\epsilon_0 \omega} \frac{\partial^2 \omega_M}{\partial y^2} + \frac{\omega}{2\epsilon_0} \frac{\partial^2 \epsilon_0}{\partial y^2} - \frac{\omega_M}{\omega(\epsilon_0 \omega^2 - \omega_M)} \Omega_y^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \omega^2 - \omega_M} \times$$

$$\times \left( \omega^2 \frac{\partial \epsilon_0}{\partial y} - \frac{\partial \omega_M}{\partial y} \right) \Omega_y - \frac{c^2}{\epsilon_0 \omega} D^2;$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{dt} = \frac{1}{k_x} \Omega_y^2 + \left( \frac{1}{\epsilon_0 k_x} - \frac{c^2 k_x}{\epsilon_0 \omega^2} \right) \Omega_x^2 -$$

$$-\left( \frac{\omega}{2\epsilon_0 k_x} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x} - \frac{1}{2\epsilon_0 \omega k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial x} \right) \Omega_x -$$

$$-\left( \frac{\omega}{2\epsilon_0 k_x} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2\epsilon_0 \omega k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial y} \right) \Omega_y;$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt} = \left( \frac{1}{2\epsilon_0 \omega k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial y} - \frac{\omega}{2\epsilon_0 k_x} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial y} \right) \Omega_x - \frac{c^2}{\epsilon_0 \omega} \Omega_y D +$$

$$+\left( \frac{1}{k_x} - \frac{c^2 k_x}{\epsilon_0 \omega^2} \right) \Omega_x \Omega_y.$$

Здесь использовались следующие обозначения:

$$D = \frac{\partial k_y}{\partial y}; \quad \Omega_x = -\frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad \Omega_y = -\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

где  $D$  – расходимость луча,  $\Omega_x$  – коэффициент продольной частотной модуляции,  $\Omega_y$  – коэффициент поперечной частотной модуляции.

Для частного случая плазмopodobной дисперсии, описываемой уравнением Клейна–Гордона (1.7), эти формулы имеют более простой вид (6.3)–(6.10), приведенный в главе 6.

Некоторая громоздкость полной системы лучевых уравнений оправдывается появившейся возможностью искусственно управлять волной в диспергирующей среде путем формирования ее структуры при излучении, не говоря уже о том, что эти уравнения дают возможность более точно, без систематических ошибок описывать рефракционные эффекты. Кроме того, они легко интегрируются численными методами, а для описания немодулированных волн достаточно первых пяти уравнений приведенного выше ряда.

Как мы уже констатировали, стандартный вариант ПВГО имеет ограниченное использование для описания рефракции волн в диспергирующих средах. Его можно рассматривать лишь как некоторую асимптотику геометрической оптики для немодулированных волн в условиях достаточно слабой дисперсии. В то же время, как следует из приведенных уравнений, стандартный вариант дает правильное описание рефракции в бездисперсных средах:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2}{2\varepsilon_0^2} \nabla \varepsilon_0.$$

Ниже мы попытаемся пояснить причину, по которой плавная поперечная неоднородность модельного поля существенна при геометрикооптическом описании волн в диспергирующих средах и несущественна для бездисперсных сред.

Здесь хотелось бы привести слова С.М. Рытова, которые можно было часто слышать на его семинарах: "В волновых процессах существует парадокс: направление распространения волны определяется фазовой скоростью, а скорость передачи энергии – групповой скоростью".

В соответствии с этим в монохроматическом случае радиус кривизны  $R$  траектории луча определяется относи-

тельным изменением волнового числа в поперечном направлении  $y$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial k / \partial y}{k}.$$

Для бездисперсной среды, для которой дисперсионное соотношение имеет вид

$$k^2 = \frac{\epsilon_0 \omega^2}{c^2},$$

величина рефракции не зависит от волнового числа и частоты:

$$\frac{\partial k / \partial y}{k} = \sqrt{\frac{\partial \epsilon_0 / \partial y}{\epsilon_0}}.$$

Поэтому любая поперечная неоднородность  $p$  амплитуды поля типа (1.16)

$$U = A_0 \exp(-py) \exp\{i(\omega t - kx)\}$$

не может повлиять на рефракцию волн, поскольку лучевые уравнения останутся справедливыми и при  $k \rightarrow \infty$ , когда соотношение  $p/k$  становится исчезающе малым.

Совсем другая ситуация наблюдается в диспергирующей среде. Здесь волновое число не может быть произвольным, его величина имеет вполне определенное значение. Дисперсионное соотношение (1.17) для неоднородных волн (1.16)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} + p^2$$

показывает, что параметр поперечного затухания  $p$  входит в выражение для  $k$  наравне с частотой волны  $\omega$  и собственной частотой среды  $\omega_L$ . Для того чтобы в среде наблюдалась рефракция, необходимо, чтобы величины  $\omega$  и  $\omega_L$  были соизмеримы. При  $\omega_L \rightarrow \omega$  волновое число  $k \rightarrow 0$ , и, вообще говоря, соотношение  $p/k$  может быть сколь угодно большим. Величина  $p/k \sim 1/L_w \sim O(\chi)$  в рамках геометрической оптики существенно меняет фазовую скорость волны и соответствует рефракционным явлениям, что, собственно, и учитывается в предложенном варианте ПВГО. Все это становится достаточно очевидным при внимательном анализе примеров точного решения (1.18)–(1.20) для УКГ.

Дальнейшее увеличение  $p/k$  уводит нас за рамки применимости геометрической оптики (4.1) и приводит к комплексной

ГО, которая способна уже учитывать дифракционные волновые эффекты.

На вопрос, как следует оценивать полученные в данной монографии результаты – как расширение возможностей геометрической оптики или просто как приведение этих возможностей в естественные рамки – правильным ответом, вероятно, будет второй вариант, поскольку условия применимости ПВГО (4.1) давно декларированы и общепризнаны, а других условий, например, в виде ограничения бесконечного лучевого ряда (4.2) только двумя главными членами, насколько известно автору, никто не выдвигал.

---

## Литература

---

1. Brillouin L. Wave propagation and group velocity. N.Y.; L.: Acad. Press, 1960. 154 p.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: В 2 т. М.: Мир, 1978. Т. 1. 578 с.
4. Kopeikin V. Description of the dispersive refraction effect by space-time ray method // Wave Motion. 1998. Т. 27. Р. 307–319.
5. Kopeikin V. Wave packet motion in a homogeneous half-space with time dispersion // Ibid. 2002. Т. 35. Р. 163–180.
6. Kopeikin V. Artificial refraction of radiowaves in the ionosphere // J. of Atmospheric and Solar-Terristrial Physics. 2003. Т. 65. Р. 447–456.
7. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 304 с.
8. Рытов С.М. О переходе от волновой к геометрической оптике // ДАН СССР. 1938. Т. 18, № 2. С. 235–240.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
10. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
11. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 272 с.
12. Choudhary S., Felsen L. Asymptotic theory for inhomogeneous waves // IEEE Trans. 1973. AP-21, N 6. Р. 827–842.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 622 с.
14. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: ГИИТЛ, 1957. 442 с.
15. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1982. 392 с.
16. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
17. Вайнштейн Л.А. Распространение импульсов // Успехи физ. наук. 1976. Т. 118, вып. 2. С. 339–367.
18. Чоудхари С., Фелсен Д. Распространение и дифракция гауссовых пучков в приближении геометрической оптики неоднородных волн // ТИИЭР. 1974. Т. 62, N 11. С. 136–139.

19. *Baird L.C.* Moments of a wave packet // *Amer. J. Phys.* 1972. N 2. P. 327–329.
20. *Маркувиц Н.* Квазикорпускулярный подход к распространению волн // *ТИИЭР*. 1980. Т. 68, № 11. С. 25–43.
21. *Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И.* Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1971. Т. 14, № 9. С. 1354–1363.
22. *Марков Г.Т.* Антенны. М.; Л.: Изд-во ГЭИ, 1960. 536 с.
23. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967. 376 с.
24. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832 с.
25. *Минкович Б.М., Яковлев В.П.* Теория синтеза антенн. М.: Сов. радио, 1969. 294 с.
26. *Копейкин В.В.* Численное моделирование процесса распространения неоднородного волнового пакета в среде с частотной дисперсией. М., 1985. 10 с. (Препринт/ИЗМИРАН; 5-538).
27. *Копейкин В.В.* Дисперсионная рефракция пространственно-неоднородных волновых пакетов // *Радиотехника*. 1986. № 9. С. 87–90.
28. *Копейкин В.В.* Дисперсионная рефракция: квазистационарное лучевое приближение // Там же. 1988. № 2. С. 73–76.
29. *Копейкин В.В.* Особенности распространения неоднородных волн в диспергирующей среде // Там же. 1987. № 10. С. 62–65.
30. *Копейкин В.В.* Самовоздействие волн в линейных диспергирующих средах // Там же. 1988. № 5. С. 69–94.
31. *Рытов С.М.* Модулированные колебания и волны // *Тр. Физ. ин-та им. П.Н. Лебедева*. 1940. Т. 2, № 1. С. 1–40.
32. *Островский Л.А.* Дисперсионное сжатие частотно-модулированных волн в неоднородной плазме // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1976. Т. 19, № 4. С. 1333–1337.
33. *Лезин Ю.С.* Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М.: Сов. радио, 1969. 446 с.
34. *Herbert Th.* Tables of Virtual Heights for Models of Monotonic and Non-monotonic Ionospheric Layers // *Radio Science*. 1967. Vol. 2, N 10. P. 1269–1277.
35. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
36. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
37. *Черкашин Ю.Н., Бочкарев Г.С., Еременко В.А.* и др. Применение численных алгоритмов метода параболического уравнения в задачах распространения радиоволн // *Тез. докл. XIV Всесоюз. конф. по распространению радиоволн*. Л., 1984. С. 338–340.
38. *Шульц-Дюбуа Е.О.* Скорость переноса энергии при распространении электромагнитных волн в диспергирующей среде // *ТИИЭР*. 1969. Т. 57, № 10. С. 63–74.

39. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Некоторые вопросы асимптотической теории дифракции // Там же. Т. 62, № 11. С. 6–29.
40. Кравцов Ю.А., Островский Л.А., Степанов Н.С. Геометрическая оптика неоднородных и нестационарных диспергирующих сред // Там же. С. 91–112.
41. Вей-и Д., Дешамп Г. Использование комплексных лучей в задачах рассеяния // Там же. С. 150–162.
42. Беннетт Д. Комплексные лучи при распространении радиоволн в поглощающей ионосфере // Там же. С. 193–202.
43. Коннор К., Фелсен Л. Комплексные пространственно-временные лучи и их применение в теории распространения импульсов в поглощающих и диспергирующих средах // Там же. С. 203–218.
44. Сан-юн С., Фелсен Л. Неоднородные волны в анизотропных средах // Там же. С. 225–226.
45. Арсаев П.Е., Кинбер Б.Е. К вопросу о геометрооптическом подходе при распространении волн в неоднородных поглощающих средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. № 9. С. 1379–1387.
46. Кравцов Ю.А. Приближение геометрической оптики в общем случае неоднородных и нестационарных сред с частотной и пространственной дисперсией // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1968. Т. 28, № 6. С. 1470–1476.
47. Рытов С.М. Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн // Там же. 1947. Т. 17, № 10. С. 930–936.
48. Альперт Я.Л. Распространение радиоволн и ионосфера. М.: Изд-во АН СССР. 1960. 480 с.
49. Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Поллака. М.: Физматгиз, 1959. 934 с.
50. Малюжинец Г.Д. Развитие представлений о явлениях дифракции // Успехи физ. наук. 1959. Т. 69, № 2. С. 321–334.
51. Зверев В.А. К вопросу о сжатии и расплывании модулированных сигналов в диспергирующих средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 2. С. 150–152.
52. Блюх И.В. Сжатие импульса в случайной среде // Там же. 1964. Т. 7, № 4. С. 460–470.
53. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.
54. Стреттон Д.А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 540 с.
55. Чернов Л.А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 160 с.
56. Кравцов Ю.А. Комплексные лучи и комплексные каустики // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9. С. 1283–1304.
57. Калошин В.А., Орлов Ю.И. Об особенностях лучевой теории "просачивания" сферической волны через параболический плазменный слой // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18, № 10. С. 2028–2033.



58. Литвак А.Г., Таланов В.И. Применение метода параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 4. С. 539–543.
59. Орлов Ю.И., Анютин А.П. Комплексная пространственно-временная лучевая теория распространения гауссовых радиоимпульсов в диспергирующих средах // Там же. 1978. Т. 21, № 5. С. 743–747.
60. Анютин А.П., Орлов Ю.И. Пространственно-временная геометрическая теория дифракции частотно-модулированных радиосигналов в однородной диспергирующей среде // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22, № 10. С. 2028–2090.
61. Островский Л.А. О распространении ЧМ-сигналов в диспергирующих средах // Там же. 1965. Т. 10, № 7. С. 1176–1180.
62. Степанов Н.С. О преобразовании спектра волн в диспергирующей среде с медленно меняющимися параметрами // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 5. С. 700–706.
63. Кравцов Ю.А., Яшин Ю.Я. Комплексная геометрическая оптика неоднородных сред // Там же. 1969. Т. 12, № 5. С. 674–685.
64. Фок В.А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 80 с.
65. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 518 с.
66. Лошаков Л.Н., Пчельников Ю.Н. О соотношении фазовой и групповой скоростей в линиях передачи электромагнитной энергии // Радиотехника. 1981. Т. 36, № 6. С. 71–72.
67. Полевой В.Г., Рытов С.М. О четырехмерной групповой скорости // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125, № 4. С. 549–565.
68. Гапонов А.В., Островский Л.А., Рабинович М.И. Одномерные волны в линейных системах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 2. С. 164–213.
69. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
70. Баскаков С.И. Основы электродинамики. М.: Сов. радио, 1973. 248 с.
71. Войтович Н.Н., Савченко Н.А. Обобщенный критерий близости диаграмм в задаче синтеза антенн по методу В.В. Семенова // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18, № 9. С. 1794–1798.
72. Смирнов А.И. Распространение волновых пакетов в плавно неоднородных диспергирующих средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 11. С. 1503–1507.
73. Гуревич А.В., Цедилина Е.Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. М.: Наука, 1979. 246 с.
74. Копейкин В.В. Дисперсионная рефракция с точки зрения принципа суперпозиции // Радиотехника. 1991. № 5. С. 88–91.
75. Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Д.Б. Келлера и Д.С. Пападакиса. М.: Мир, 1980. 229 с.
76. Радовский М.И. Александр Степанович Попов. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 388 с.

78. Березкин Е.Н. Лекции по теоретической механике. М.: Изд-во МГУ, 1968. 316 с.
79. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1979. 432 с.
80. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985. 384 с.
81. Хармут Х.Ф. Передача информации ортогональными функциями. М.: Связь, 1975. 266 с.
82. Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1985. 338 с.
83. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
84. Котельников В.А., Николаев А.М. Основы радиотехники. М.: Связьиздат, 1950. 371 с.
85. Резников А.Е., Копейкин В.В. Распространение радиоволн и использование их спектра // 100 лет радио / Под ред. акад. РАН В.В. Мигулина. М.: Радио и связь, 1995. 386 с.
86. Резников А., Копейкин В., Любимов Б. ШПС – эволюция или революция? // Радио. 1998. № 3. С. 54–56.
87. Резников А.Е., Копейкин В.В., Морозов П.А., Шекотов А.Ю. Разработка аппаратуры, методов обработки данных для электромагнитного подповерхностного зондирования и опыт их применения // Успехи физ. наук. 2000. Т. 170, № 5. С. 565–568.
88. Popov A.V., Kopeikin V.V., Ning Yan Zhu, Landstorfer P.M. Modelling EM transient propagation over irregular dispersive boundary // Electronics Letters. 2002. Т. 38, N 14. P. 691–692.
89. Копейкин В.В., Любимов Б.Я., Резников А.Е. Устройство связи // Патент РФ № 2185033. М. Приоритет от 08.07.1999.
90. Popov A.V., Kopeikin V.V., Landstorfer F.M. Full-wave simulation of overland radar pulse propagation // Electronic Letters. 2003. Т. 39, N 6. P. 550–552.
91. Копейкин В.В., Морозов П.А., Козляков А.Н., Беркут А.И. Устройство для радиолокационного зондирования подстилающей поверхности // Патент РФ № 2205424. М. Приоритет от 29.12.2001.
92. Сахтеров В.П., Писарев Р.В., Лобзин В.В. и др. Цифровая коротковолновая широкополосная радиостанция "Ангара-5М" // Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике: Сб. докл. Всерос. науч. конф. Муром, 2003. С. 451–454.
93. Kopeikin V. Numerical description of the wave packet propagation in time dispersive media via nonstationary parabolic wave equation // Proc. of 1997 IEEE AP-S Intern. Simpos. and URSI North American Radio Science Meeting. Monreal; Quebec, 1997. P. 376–379.
94. Klimov S.I., Kopeikin V.V. et al. On use of a mobile surface radar to study the atmosphere and ionosphere of Mars // Adv. Space Res. 1990. Т. 10, N 3. P. 35–38.

95. Копейкин В.В., Соколовский В.И., Черкашин Ю.Н. О частотной корреляции огибающей радиосигнала для модели случайно-неоднородной среды с частотной дисперсией и регулярными градиентами // Распространение декаметровых радиоволн. М.: ИЗМИРАН, 1982. С. 64–68.
96. Черкашин Ю.Н. Вычисление волновых полей в плавнонеоднородных средах методом параболического уравнения теории дифракции // Распространение декаметровых радиоволн. М.: ИЗМИРАН, 1980. С. 5–18.
97. Всехсвятская И.С., Копейкин В.В., Соболева Т.Н. и др. Современные возможности для построения глобальной эмпирической неоднородной модели ионосферы // Распространение декаметровых радиоволн. М.: ИЗМИРАН, 1992. С. 78–81.
98. Копейкин В.В., Соколовский В.И., Черкашин Ю.Н. Расчет волновых полей методом параболического уравнения в моделях случайно-неоднородных сред // Дифракционные эффекты коротких радиоволн. М.: ИЗМИРАН, 1981. С. 6–11.
99. Копейкин В.В. Использование цифровой фильтрации при расчетах волновых полей численными методами на основе параболического уравнения // Практические аспекты изучения ионосферы и ионосферного распространения радиоволн. М.: ИЗМИРАН, 1981. С. 170–177.
100. Еременко В.А., Копейкин В.В., Соколовский В.И., Черкашин Ю.Н. Влияние случайных неоднородностей на напряженность поля в области каустики // Геомагнетизм и аэронавигация. 1982. Т. 22, № 6. С. 1025–1026.
101. Хармут Х. Теория секвентного анализа. М.: Мир, 1980. 574 с.
102. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
103. Yosida K. Functional Analysis. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer, 1965. 304 p.
104. Afanasyev N.T., Zheonykh A.A., Sazhin V.I. et al. Effect of large-scale clouds of ionospheric irregularities on propagation of high-frequency radio waves // J. of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 1998. T. 60, N 17. P. 1687–1694.
105. Tinin M.V., Afanasiev N.T., Mikheev S.M. et al. On some problems of the theory of radio wave propagation in a randomly inhomogeneous ionosphere // Radio Science. 1998. T. 27, N 2. P. 245–255.
106. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2 т. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2. 886 с.
107. Baranov V.A., Karpenko A.L., Popov A.V. Evolution of Gaussian beams in the nonuniform Earth-ionosphere waveguide // Radio Science. 1992. T. 27, N 2. P. 307–314.
108. Копейкин В.В. Рефракция волн в линейных средах с частотной дисперсией. М.: Диаконт, 2005. 114 с.
109. Иванов В.А., Иванов Д.В., Колчев А.А. Исследование особенностей дисперсионных характеристик радиоканалов с помощью

ЛЧМ-ионозонда // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 3. С. 241–254.

110. *Иванов В.А., Иванов Д.В.* Коррекция широкополосных коротковолновых ионосферных радиоканалов // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 688–697.
111. *Копейкин В.В.* Упрощенный способ вывода уравнений модифицированной пространственно-временной геометрической оптики для уравнений Клейна–Гордона // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 2. С. 159–168.

---

## Оглавление

---

<b>Предисловие .....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Исходные волновые уравнения и некоторые точные их решения</b>	
§ 1. Волновые уравнения .....	15
§ 2. Неискаженная передача сигналов в диспергирующей среде ....	19
§ 3. Круговые стационарные волны .....	22
§ 4. Обсуждение результатов .....	24
<b>Глава 2. Распространение волновых пакетов в однородном пространстве с частотной дисперсией</b>	
§ 1. Введение .....	27
§ 2. Интегральные характеристики переноса энергии .....	29
§ 3. Постановка задачи.....	31
§ 4. Вектор средней групповой скорости .....	32
§ 5. Поперечная координата волнового пакета .....	35
§ 6. Время распространения волнового пакета .....	38
§ 7. Ширина и длительность волнового пакета .....	40
§ 8. Волновые пакеты в бездисперсных и диспергирующих средах.....	42
§ 9. Обсуждение результатов .....	49
<b>Глава 3. Численное описание эффекта дисперсионной рефракции с помощью нестационарного параболического уравнения</b>	
§ 1. Синтез волновых пакетов с поперечной частотной модуляцией.....	51
§ 2. Нестационарное параболическое уравнение .....	54
§ 3. Конечно-разностное уравнение для НПУ .....	56
§ 4. Результаты численных расчетов .....	59
§ 5. Обсуждение результатов .....	60
<b>Глава 4. Описание эффекта дисперсионной рефракции с помощью пространственно-временной геометрической оптики</b>	
§ 1. Введение .....	63
§ 2. Уравнение эйконала и уравнение переноса .....	64
§ 3. Стандартный вариант ПВГО .....	66
§ 4. Новый способ получения лучевых уравнений .....	67

§ 5. Модели поля .....	72
§ 6. Обсуждение результатов .....	80
<b>Глава 5. Модифицированный вариант пространственно-временной геометрической оптики для сред с произвольным законом частотной дисперсии</b>	
§ 1. Введение .....	83
§ 2. Уравнение эйконала и уравнение переноса .....	83
§ 3. Стандартный вариант ПВГО .....	86
§ 4. Альтернативный способ получения лучевых уравнений .....	87
§ 5. Модели поля .....	89
§ 6. Квазилучевая модель поля .....	93
§ 7. Обсуждение результатов .....	96
<b>Глава 6. Искусственная рефракция радиоволн в ионосфере</b>	
§ 1. Введение .....	98
§ 2. Постановка задачи .....	101
§ 3. Результаты численного счета с использованием параболического уравнения .....	104
§ 4. Результаты численного счета с использованием лучевых уравнений .....	112
§ 5. Обсуждение результатов .....	116
<b>Глава 7. Величина систематической ошибки стандартной ПВГО при описании распространения немодулированных радиоволн в ионосфере</b>	
§ 1. Введение .....	117
§ 2. Рефракция волны в линейном слое и $\omega_L^2$ .....	117
§ 3. Обсуждение результатов .....	121
§ 4. Излучение радиоволн с поверхности Земли .....	123
§ 5. Излучение радиоволн со спутника .....	126
§ 6. Прохождение радиоволн через межслоевую долину в ионосфере .....	127
§ 7. Обсуждение результатов .....	129
<b>Заключение</b> .....	130
<b>Литература</b> .....	135

Научное издание

**Копейкин Владимир Васильевич**

**Рефракция волн  
в линейных средах  
с частотной дисперсией**

Зав. редакцией *М.В. Грачева*

Художник *Е.М. Шевейко*

Художественный редактор *Ю.И. Духовская*

Технический редактор *О.В. Аредова*

Корректор *Р.В. Молоканова*

Подписано к печати 18.07.2007.

Формат 60 × 90<sup>1/16</sup>. Гарнитура Таймс

Печать офсетная

Усл. печ. л. 9,0. Усл.кр.-отт. 9,5. Уч.-изд.л. 7,2

Тираж 200 экз. Тип. зак. 1520

Заказное

Издательство «Наука»

117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: [secret@naukaran.ru](mailto:secret@naukaran.ru)

[www.naukaran.ru](http://www.naukaran.ru)

ППП «Типография «Наука»

121099, Москва, Шубинский пер., 6