Волны Холла в плазме

Запишем уравнения Максвелла [5]:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{8}$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \tag{9}$$

Плотность тока $\vec{J}$ в обобщенном законе Ома (9) учитывает влияние электрического поля $\vec{E}$ и силу Лоренца на электрон со стороны магнитного поля $\vec{B}$.

Уравнение движения электронов с зарядом e, массой m_e, движущихся со скоростью $\vec{V}_i$ в электрическом и магнитном полях задается уравнением:

$$m_e \frac{dV_i}{dt} = e(\vec{E} + \vec{V}_i \times \vec{B}) \tag{10}$$

Плотность тока может быть выражена через среднюю скорость электронов $\vec{V}$ и их концентрацию n_e:

$$\vec{J} = en_e \vec{V} \tag{11}$$

Среднюю скорость можно получить интегрированием уравнения движения (10) по времени на интервале $\tau = 1/\nu$, где ν – частота соударений

$$\vec{V} = \int_0^\tau \frac{e}{m_e}(\vec{E} + \vec{V}_i \times \vec{B})dt = \frac{e\tau}{m_e}\left[\vec{E} + \left(\int_0^\tau \vec{V}_i dt\right) \times \vec{B}\right] = \frac{e\tau}{m_e}(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \tag{12}$$

Или

$$\vec{J} = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e}(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \tag{13}$$

Выражение для проводимости σ в нашем случае имеет вид:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} \tag{14}$$

Волновое уравнение, которое следует из уравнений (5-9), получим стандартным путем [5].

Найдем операцию ротора для уравнения (5) и продифференцируем уравнение (6) по времени.

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \nabla \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \nabla \times \vec{J} \tag{15}$$

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{16}$$

Объединяя (15) и (16) с учетом (7) и (8), получим волновое уравнение

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu_0 \nabla \times \vec{J} \tag{17}$$

Будем считать, что ток проводимости, связанный с движением электронов в уравнении (17), преобладает над токами смещения, что позволяет волновое уравнение привести к виду:

$$\nabla \times J = 0 \tag{18}$$

или

$$\sigma(\nabla \times \vec{E} + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \nabla \sigma \times (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) = 0 \tag{19}$$

По этому поводу оппоненты обычно говорят: «То, что можно ограничиться только этими членами, надо еще доказать!» Мы ничего доказывать не будем, а скажем: «Рассмотрим такую модель *плазмы, в которой (19) выполняется», или еще короче: «Пусть (19) справедливо».*

Сначала рассмотрим однородную среду ($\nabla\sigma = 0$), для которой волновое уравнение выглядит как

$$\nabla \times \vec{E} + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) = 0 \qquad (20)$$

Пусть электрон движется в магнитном поле. Здесь мы будем иметь ввиду не внешнее, а собственное магнитное поле волны.

Совместим декартову систему координат с центром одной из неподвижных нейтральных частиц, удаленную от соседних на длину свободного пробега электронов λ.

Магнитное поле B_z, направленное вдоль оси z, вызовет ларморовское вращение электрона в плоскости (x, y). Радиус ларморовской окружности R_L определяется как:

$$R_L = \frac{V_y}{\omega_L} \qquad (21)$$

где циклотронная частота ω_L задается соотношением:

$$\omega_L = \frac{eB_z}{m_e} \qquad (22)$$

Здесь: V_{xy} – проекция скорости электронов на плоскость (x, y) [14].

Если $R_L \geq \lambda/2$, электроны движутся по круговым ларморовским орбитам, не имея полного оборота из-за столкновений с нейтральными частицами. Для того, чтобы определить траекторию электрона, рассмотрим процесс его столкновения с частицей. Соударение может быть как упругим, так и неупругим (рис. 6-7).

Если размеры нейтральной частицы значительно меньше длины свободного пробега (например, для воздуха это соотношение – тысяча), что позволяет считать, что все электроны, движущиеся по ларморовским окружностям и столкнувшиеся с частицей, имеют относительно нее однозначно определяемую магнитным полем B_z и радиусом r тангенциальную компонен-

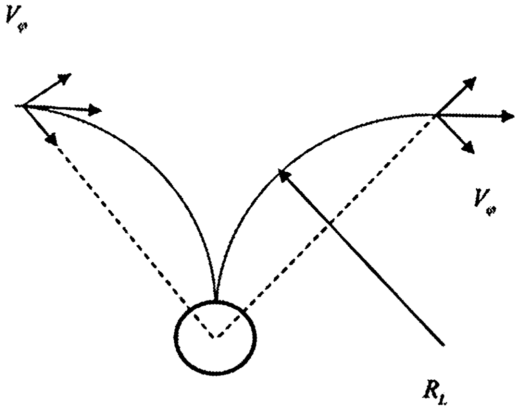

Рис. 6. Упругое соударение электрона с нейтральной частицей.

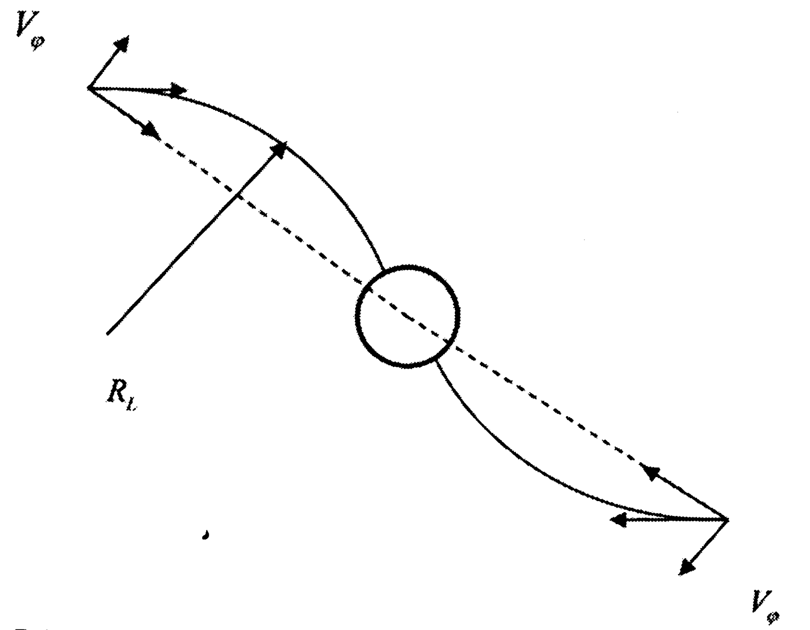

Рис. 7. Неупругое соударение двух электронов с нейтральной частицей.

$$\boxed{V_{xy} = \omega_L R_L}$$

$$\boxed{V_\varphi = V_{xy}\frac{r}{2R_L}}$$

$$\boxed{\omega_L = \frac{eB_z}{m_e}}$$

$$\boxed{V_\varphi = \frac{eB_z r}{2m_e}}$$

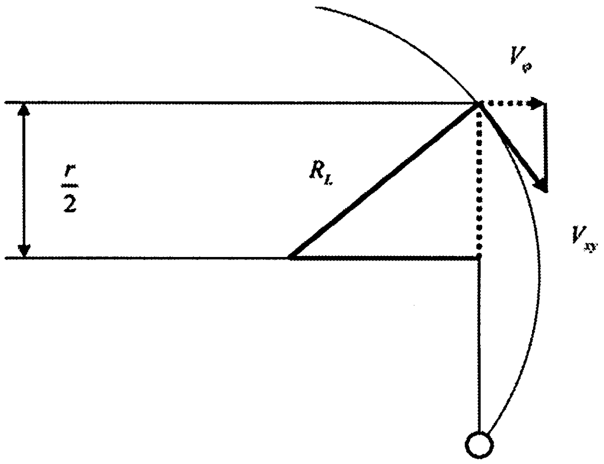

Рис. 8. Схема расчета тангенциальной скорости столкнувшегося электрона.

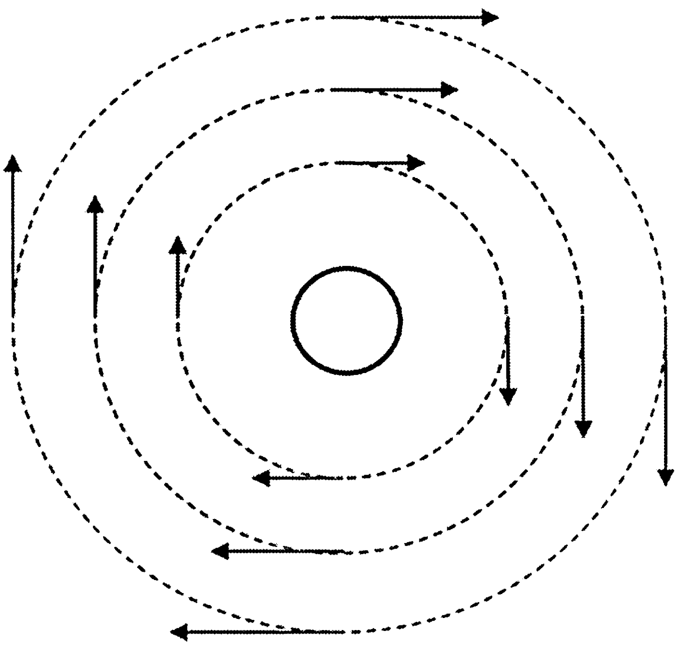

Рис. 9. Круговой ток вокруг нейтральной частицы.

ту линейной скорости V_φ. В полярной системе координат (r, φ) связанной с нейтральной частицей, в плоскости $z = 0$ эта компонента имеет величину

$$V_\varphi = \frac{reB_z}{2m_e}, \qquad r \le \lambda / 2 \tag{23}$$

Вывод формулы (23) поясняется рис. 8.

Электроны, как прямые, так и отраженные, образуют вокруг частицы круговой ток (рис. 9).

Тангенциальная скорость электронов вокруг нее (23) в векторной форме имеет вид

$$\vec{V} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}_z \times \vec{r} \tag{24}$$

Используя выражение для скорости (24), найдем векторное произведение $(\vec{V} \times \vec{B}_z)$:

$$(\vec{V} \times \vec{B}_z) = \frac{eB_z^2}{2m_e} \vec{r} = \vec{E}_h(r) \tag{25}$$

Формула (25) описывает эффект Холла и означает, что каждая нейтральная частица плазмы, с которой происходят столкновения электронов при наличии магнитного поля, является генератором напряженности электрического поля E_h, занимающем на плоскости $z = const$ площадь $S_h \sim \lambda^2$, а вдоль оси z высоту h_h, связанную с эффективным сечением соударений Q как $h_h \sim \sqrt{Q}$ [12].

Напряженность электрического поля в микрогенераторе Холла имеет размерность:

$$[E_h] = A^{-1} \cdot s^{-3} \cdot kg \cdot m = V \cdot m^{-1}$$

В отличие от практически реализованных МГД-генераторов электрической энергии на эффекте Холла [6], рассматриваемый нами микрогенератор имеет квадратичную зависимость от магнитной индукции. Причина в том, что здесь поле играет двойную роль: во-первых, оно является «внешним», приводящим к эффекту Холла, во-вторых, оно вызывает упорядоченное круговое движение электронов и входит в формулу для их скорости.

Найдем среднее (макроскопическое) электрическое поле с пространственными масштабами много больше длины свободного пробега λ, возбуждаемое микрогенераторами Холла.

Воспользуемся определением напряженности электрического поля через скалярный потенциал φ:

$$\vec{E} = \nabla \varphi$$

Разность потенциалов $U = \varphi_b - \varphi_a$ между двумя точками определяется как:

$$U = \int_a^b \vec{E}\, d\vec{r}$$

Найдем напряжение электрического поля на противоположных концах генератора Холла $a = -\lambda/2, \quad b = \lambda/2$, лежащего на оси x.

Напряженность поля E_H относительно центра направлена в противоположные стороны, но наличие производной

$$\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

приводит к асимметрии генератора вдоль оси x. Напряженность поля на одной из границ равна

$$B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\lambda}{2}, \text{ на другой } B_z - \frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\lambda}{2}.$$

Напряжение между противоположными точками генератора равно:

$$U_h = \frac{e}{2m_e}\int_0^{\lambda/2}\left(B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x}x\right)^2 x dx - \frac{e}{2m_e}\int_0^{\lambda/2}\left(B_z - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)^2 x dx = \qquad (26)$$
$$= \frac{2e}{m_e}\int_0^{\lambda/2} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x}x^2 dx = \frac{\lambda^3 e}{12 m_e} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

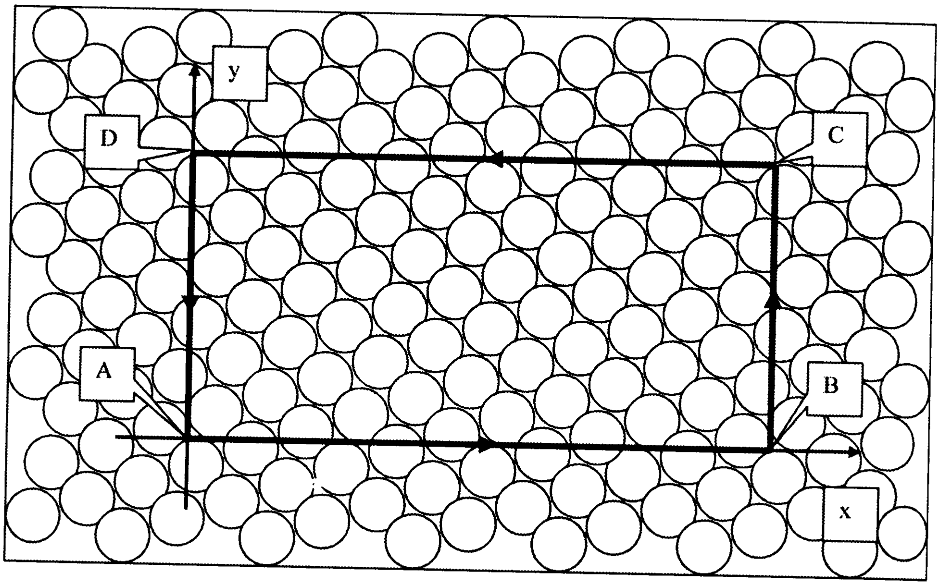

Рис. 10. Схема интегрирования по границе.

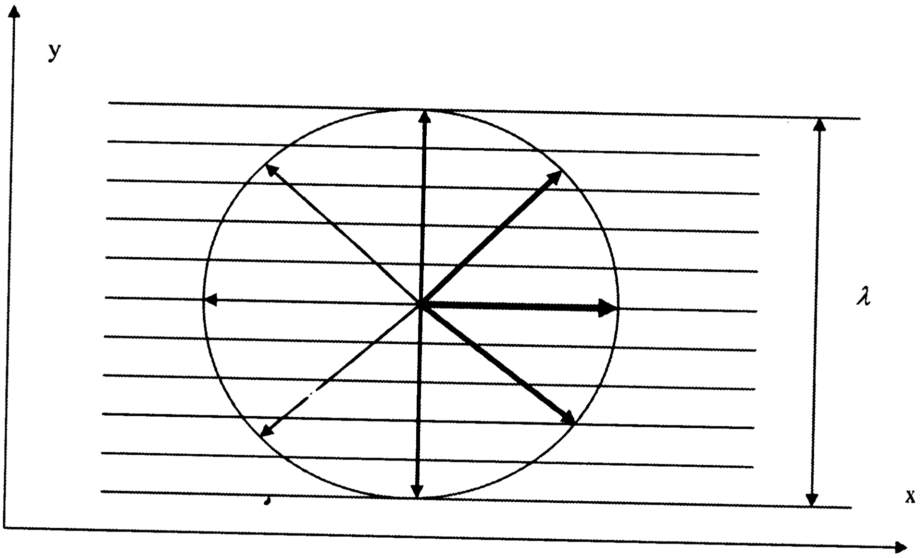

Рис. 11. Схема усреднения поля.

Найдем напряжение U_H между точками a и b, предполагая, что расстояние между ними много больше длины свободного пробега $(b-a) >> \lambda$.

Теперь ось x не привязана к центру генератора, а может пересекать его с равной вероятностью отклонения по поперечной координате, что приведет к уменьшению вклада каждого генератора в результирующее напряжение (рис. 10-11).

Учтем это уменьшение введением коэффициента

$$K_1 = \frac{\pi}{4} \tag{27}$$

Напряжение усредненного поля в предположении, что количество пересекаемых генераторов равно $n \approx dx / \lambda$ можно записать как

$$U_H = K \frac{\lambda^2 e}{m_e} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} dx \tag{28}$$

$$K = \frac{\pi}{48} \tag{29}$$

Безразмерный коэффициент (29) получен для линейного возрастания по радиусу тока в микрогенераторе, когда для всех столкнувшихся электронов

$$V_{xy} \geq \frac{\lambda e B_z}{2m_e}$$

Более реалистичное распределение электронов по скоростям даст другое значение коэффициента, что, тем не менее, не повлияет на физику рассматриваемых процессов.

Напряженность электрического поля в плоскости (x, y) будет иметь вид

$$\vec{E}_H = K \frac{\lambda^2 e}{m_e} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{1}_x + K \frac{\lambda^2 e}{m_e} B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{1}_y \tag{30}$$

Для нахождения функции ротора электрического поля, возбуждаемого микрогенераторами Холла (25) и одновременного его усреднения, воспользуемся теоремой Стокса: Поток ротора через поверхность равен циркуляции вектора вдоль ее границы.

$$\int_S (\nabla\times\vec{E}_H)\cdot d\vec{s} = \int_L \vec{E}_H\cdot d\vec{l} \tag{31}$$

Зададим длину контура интегрирования $L >> \lambda$

Вычисляя циркуляцию вектора электрического поля вдоль границы $CDABC$ (рис. 10) получим:

$$(\nabla\times\vec{E}_H)\cdot\ddot{s} = K\frac{\lambda e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}xy - K\frac{\lambda e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial y}xy \tag{32}$$

Или

$$\nabla\times\vec{E}_H = K\frac{\lambda e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial x} - K\frac{\lambda e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial y} \tag{33}$$

Здесь мы воспользовались тем же подходом, что и при нахождении среднего электрического поля (26-30).

Используя (6) и (33), можно получить волновое уравнение для магнитного поля.

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} - K\frac{\lambda e B_z}{m_e}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right) = 0 \tag{34}$$

Величина

$$\left[K\frac{\lambda e B_z}{m_e}\right] = m\cdot s^{-1}$$

имеет размерность скорости.

Уравнение в частных производных первого порядка (34) хорошо известно и его обычно называют уравнением Римана для простой волны. Этим уравнением описывается большой класс физических явлений: волны в транспортном потоке, распространение пожара, процесс генерирования СВЧ колебаний в клистронах, неустойчивость плазмы и многое другое [16, 17].

Рассматриваемый волновой процесс также может быть отнесен к одному из типов неустойчивости плазмы.

Теперь, используя полученные результаты для однородной плазмы, рассмотрим модель неоднородной плазмы, т.е. уравнение (19), в котором $\nabla\sigma \neq 0$.

Будем считать, что электрическое поле внутри плазмы определяется только ЭДС микрогенераторов Холла

$$\vec{E}_H = K\frac{\lambda^2 e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{1}_x + K\frac{\lambda^2 e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial y}\vec{1}_y$$

Операция векторного умножения дает:

$$\nabla\sigma\times\vec{E}_H = -K\frac{\lambda^2 e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + K\frac{\lambda^2 e}{m_e}B_z\frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\partial\sigma}{\partial x} \qquad (35)$$

Уравнение (35) перепишем в более подробном виде

$$\sigma\left(\frac{\partial B_z}{\partial t} - K\frac{\lambda e B_z}{m_e}\frac{\partial B_z}{\partial x} + K\frac{\lambda e B_z}{m_e}\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) - \\ -K\left(\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\frac{\lambda e B_z}{m_e}\frac{\partial B_z}{\partial x} + K\left(\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\frac{\lambda e B_z}{m_e}\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \qquad (36)$$

Дополнительные пространственные производные, связанные с градиентом проводимости, соотносятся с членами, содержащими функцию проводимости как:

$$\frac{\lambda\nabla\sigma}{\sigma} : 1$$

и в силу своей малости могут не рассматриваться.

Волновое уравнение в неоднородной плазме примет вид:

$$\sigma\left(\frac{\partial B_z}{\partial t} - K\frac{\lambda e B_z}{m_e}\frac{\partial B_z}{\partial x} + K\frac{\lambda e B_z}{m_e}\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) = 0 \qquad (37)$$

В (37) проводимость σ может зависеть от пространственной и временной координаты.

Для численной расчетов волнового уравнения (34) в однородной плазме будем использовать суммарно-разностную первого порядка точности условно-устойчивую схему:

$$B_{x,y}^{t+1} = \frac{1}{4}(B_{x+1,y}^{t} + B_{x-1,y}^{t} + B_{x,y+1}^{t} + B_{x,y-1}^{t}) + \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x}B_{x,y}^{t}(B_{x+1,y}^{t} - B_{x-1,y}^{t}) -$$

$$-\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y}B_{x,y}^{t}(B_{x,y+1}^{t} - B_{x,y-1}^{t}) \qquad (38)$$

где

$$\alpha = K\frac{\lambda e}{m_e}$$

Здесь верхние индексы при B соответствуют временной координате t, нижние индексы – пространственным координатам x и y.

Условие устойчивости разностной схемы (31) требует выполнения соотношений между шагом по времени Δt и шагами по пространственным координатам Δx, Δy [7]:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{\alpha|B_{\max}|}; \qquad \Delta t \le \frac{\Delta y}{\alpha|B_{\max}|} \qquad (39)$$

Приведем результаты численных расчетов по суммарно-разностной схеме (38) для одномерной задачи, когда $\partial B_z / \partial y = 0$.

На рис. 12 показано пространственное распределение магнитного поля B_z и электрического поля E_x в моменты времени 0, 50 и 100 нс для начального поля гауссоидальной формы.

Начальное магнитное поле симметричной гассоидальной формы начинает перемещаться влево, при этом его левая граница становится круче, а правая положе. Возрастание пространственной производной левой границы приводит к появлению большой напряженности электрического поля. При дальнейшем движении, теоретически, производная магнитного поля и напряженность электрического станут бесконечными, и волна опрокинется.

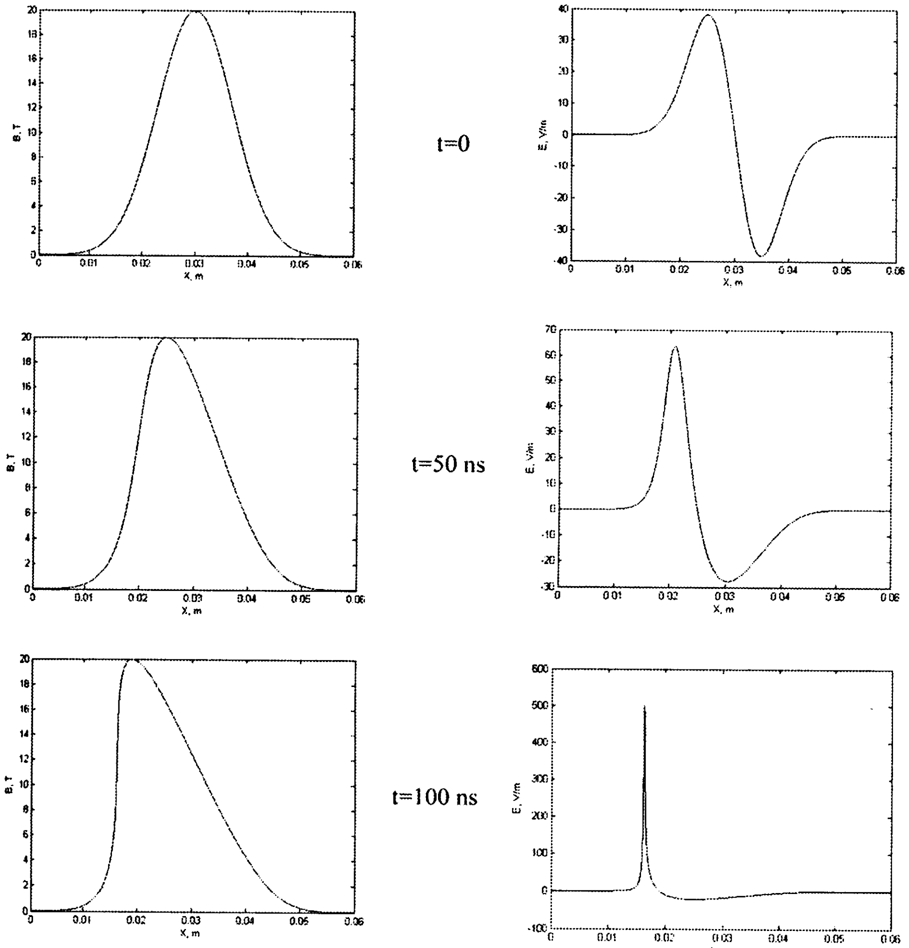

Рис. 12. Численный расчет магнитного и электрического поля.