Глава 5

Модифицированный вариант пространственно-временной геометрической оптики для сред с произвольным законом частотной дисперсии

§ 1. Введение

Рассмотрим центральный вопрос монографии – разработку модифицированного варианта ПВГО для сред с произвольным законом частотной дисперсии.

За основу взят изложенный в главе 4 подход к выводу уравнений ПВГО. Результаты, полученные ранее для частного случая частотной дисперсии, задаваемой уравнением Клейна–Гордона, а именно: эффект дисперсионной рефракции и коррекция величины обычной рефракции, которые не могут быть описаны в рамках стандартного подхода ПВГО, совершенно очевидно, должны проявляться для всех сред с частотной дисперсией, поскольку причина возникновения этих эффектов – общий нелинейный характер зависимости частоты ω и волнового числа k в дисперсионном уравнении.

§ 2. Уравнение эйконала и уравнение переноса

Для получения уравнений эйконала и переноса подставим анзатц

$$U(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r},t)\exp\{i\Psi(\mathbf{r},t)\}$$

в уравнения (1.1a), (1.2a) и выделим действительную и мнимую части комплексного уравнения

$$\nabla^2 A - \frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - A\mathbf{k}^2 + A\frac{\varepsilon_0}{c^2}\omega^2 - A\frac{\omega_M}{c^2} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2\omega_M}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} +$$
$$+\frac{i}{c^2}\frac{\partial\omega_M}{\partial\omega}\frac{\partial A}{\partial t} + i\nabla\cdot\mathbf{k}A + \frac{i\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial\omega}{\partial t}A + i2\mathbf{k}\cdot\nabla A + i\frac{2\varepsilon_0}{c^2}\omega\frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (5.1)$$

Здесь, как и ранее, градиент $\nabla\Psi$ обозначен как локальный волновой вектор $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$, а $-\partial\Psi/\partial t$ как локальная частота $\omega(\mathbf{r}, t)$.

Интегральный оператор $M(U)$ (1.2а) сведен к дифференциальным операторам следующим путем.

Разложим анзатц в ряд Тейлора:

$$U = \left(A_0 + \frac{\partial A}{\partial t}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}t^2\right)\exp\{i(\psi_0 - \omega t)\}.$$

После подстановки этого выражения в (1.2а) для $t = 0$ имеем

$$M(U) = e^{i\psi_0}\int_0^\infty \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\tau)\left[A_0 - \frac{\partial A}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\tau^2\right]\exp(-i\omega\tau)d\tau. \qquad (5.2)$$

Заметим, что интегральное выражение (5.2) эквивалентно Фурье-преобразованию (1.5). Используя очевидные свойства преобразования Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tau^m\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau = (-i)^m\frac{\partial^m\varepsilon(\mathbf{r},\omega)}{\partial\omega^m},$$

получим

$$M(U) = e^{i\psi_0}\left[\omega^2(\varepsilon_0 - \varepsilon)A_0 - i\frac{\partial(\omega^2(\varepsilon_0 - \varepsilon))}{\partial\omega}\frac{\partial A}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\omega^2(\varepsilon_0 - \varepsilon))}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right].$$

Здесь мы пренебрегли членом $-i/2(\partial\omega/\partial t)t^2$ в фазовой функции ψ, поскольку его влияние на результат незначительно в силу условий применимости ПВГО (4.1).

Действительно, $\partial^2 h/\partial t^2$ – "быстрая" функция по сравнению с

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\partial\omega}{\partial t}t^2\right),$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\tau)\exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\partial\omega}{\partial t}\tau^2\right) \approx \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\tau).$$

В асимптотическом выражении для $M(U)$ процесс интегрирования, который, собственно, и определяет "память" волны о предыдущих значениях (т.е. частотную дисперсию) неявно присутствует в величине ε (1.5).

Действительная часть (5.1) содержит уравнение эйконала

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\varepsilon_0\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_M}{c^2} = 0, \tag{5.3}$$

где

$$\omega_M = \omega^2(\varepsilon_0 - \varepsilon),$$

и дополнительные члены

$$\nabla^2 A - \frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2\omega_M}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Мнимая часть содержит уравнение переноса

$$\nabla\cdot\mathbf{k}A + \frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial\omega}{\partial t}A + 2\mathbf{k}\cdot\nabla A + \frac{2\varepsilon_0}{c^2}\omega\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{5.4}$$

и дополнительный член

$$\frac{i}{c^2}\frac{\partial\omega_M}{\partial\omega}\frac{\partial A}{\partial t}.$$

По сравнению с УКГ, в котором также присутствуют дополнительные члены к уравнению эйконала

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2},$$

имеющие порядок малости $O(\chi^2)$, в общем случае возникает еще один член

$$\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2\omega_M}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2},$$

имеющий порядок малости $O(\chi^4)$.

Для произвольного закона дисперсии в мнимой части (5.1) (т.е. в уравнении переноса) появляется член

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\omega_M}{\partial\omega}\frac{\partial A}{\partial t}$$

порядка малости $O(\chi^2)$, который в УКГ отсутствует.

§ 3. Стандартный вариант ПВГО

Ниже мы повторим все выкладки, которые делали в главе 4 для УКГ, но теперь для случая произвольного закона дисперсии.

Вектор групповой скорости

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_g \tag{5.5}$$

задает соотношения между производными:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla. \tag{5.6}$$

Определяя $\mathbf{V}_q = d\omega/d\mathbf{k}$, получим из закона дисперсии (5.3):

$$\mathbf{V}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = c^2 \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0 \omega}. \tag{5.7}$$

Дифференцируя (5.7), получим производную $d\mathbf{V}_g / dt$, которая описывает рефракционные эффекты:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = \frac{c^2}{\varepsilon_0 \omega} \frac{d\mathbf{k}}{dt} - \frac{c^2 \mathbf{k}}{\varepsilon_0^2 \omega} \frac{d\varepsilon_0}{dt} - \frac{c^2 \mathbf{k}}{\varepsilon_0 \omega^2} \frac{d\omega}{dt}.$$

Дифференцирование (5.3) по $\mathbf{r}$ и t определяет связь между частными производными:

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla)\mathbf{k} + \mathbf{k} \times (\nabla \times \mathbf{k}) = \frac{\varepsilon_0 \omega \nabla \omega}{c^2} + \frac{\omega^2 \nabla \varepsilon_0}{2c^2} - \frac{\nabla \omega_M}{2c^2} \tag{5.8}$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{c^2 \mathbf{k}}{\varepsilon \omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} - \frac{\omega}{2\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{1}{2\omega \varepsilon_0} \frac{\partial \omega_M}{\partial t} =$$

$$= -\frac{c^2 \mathbf{k}}{\varepsilon_0 \omega} \cdot \nabla \omega - \frac{\omega}{2\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + \frac{1}{2\omega \varepsilon_0} \frac{\partial \omega_M}{\partial t}. \tag{5.9}$$

В стандартном подходе $\mathbf{k} \times (\nabla \times \mathbf{k})$ в (5.8) равен нулю, что эквивалентно введению локально-плоской однородной монохроматической волны в качестве модели поля.

Для стационарной среды, где $\partial \varepsilon_0 / \partial t = 0$, $\partial \omega_M / \partial t = 0$, получим

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Действительно, в соответствии с (5.6)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \omega.$$

С другой стороны, для стационарной среды из (5.7) и (5.9) получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla\omega.$$

Выражение для производной $d\mathbf{k}/dt$ следует из (5.6) и (5.8):

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} + (\mathbf{V}_g \cdot \nabla)\mathbf{k} = \frac{\omega\nabla\varepsilon_0}{2\varepsilon_0} - \frac{\nabla\omega_M}{2\varepsilon_0\omega}.$$

Окончательно производная вектора групповой скорости записывается как

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2}{2\varepsilon_0^2}\left(1 - \frac{\omega_M}{\varepsilon_0\omega^2}\right)\nabla\varepsilon_0 - \frac{c^2}{2\varepsilon_0^2\omega^2}\nabla\omega_M. \tag{5.10}$$

В однородной среде ($\nabla\varepsilon_0 = 0,\ \nabla\omega_M = 0$) производная

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = 0,$$

что означает невозможность описания эффекта дисперсионной рефракции с помощью стандартной ПВГО.

§ 4. Альтернативный способ получения лучевых уравнений

Будем, как и ранее, использовать определение вектора групповой скорости

$$\mathbf{V}_g = \frac{\langle\mathbf{P}\rangle}{\langle W\rangle}. \tag{5.11}$$

Рассмотрим стационарную неоднородную среду. Пусть амплитуда и фаза поля U в точке $\mathbf{R}_0$, T_0 и ее окрестности заданы рядом Тейлора:

$$U(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r},\ T_0 + t) = \left\{A_0 + \mathbf{r}\cdot\nabla A + \frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2 A + \frac{\partial A}{\partial t}t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}t^2 + \mathbf{r}\cdot\left(\nabla\frac{\partial A}{\partial t}\right)t\right\}\exp\left\{i\left(\Psi_0 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{k} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\omega t - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial t}t^2 - \mathbf{r}\cdot\nabla\omega t\right)\right\}. \tag{5.12}$$

Следуя методике, описанной в главе 4, найдем для поля (5.12) градиент ∇U, производную $\partial U/\partial t$ и вычислим $\mathbf{P}$ и W по формулам (1.13), (1.14).

Пусть условия применимости ПВГО (4.1) выполняются. Для случая сред с произвольным законом дисперсии условия применимости конкретизируются как

$$\frac{\nabla\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\sim\frac{|\nabla\times\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|}\sim\frac{|\nabla\omega|}{\omega}\sim\frac{\nabla^2 A}{|\nabla A|}\sim\frac{|\nabla A|}{A}\sim\frac{1}{L_W};$$

$$\frac{|\nabla\varepsilon_0|}{\varepsilon_0}\sim\frac{|\nabla\omega_M|}{\omega_M}\sim\frac{1}{L_P};$$

$$\frac{\partial\omega/\partial t}{\omega}\sim\frac{\partial^2 A/\partial t^2}{\partial A/\partial t}\sim\frac{\partial A/\partial t}{A}\sim\frac{1}{T_W};$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|};\quad \tau=\frac{2\pi}{\omega};\quad \frac{\lambda}{L_W}\sim\frac{\lambda}{L_P}\sim\frac{\tau}{T_W}\sim\chi\ll 1.$$

Найдем средний поток энергии $\mathbf{P}$ и среднюю плотность энергии W в точке наблюдения и ее окрестности $\mathbf{R}_0$, T_0:

$$\langle\mathbf{P}\rangle=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\mathbf{P}(\mathbf{r},\ t+\xi)d\xi;\quad \langle W\rangle=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}W(\mathbf{r},\ t+\xi)d\xi.$$

Интегрирование выражений для $\mathbf{P}$ и W за период $\tau=$ $=2\pi/(\omega+\mathbf{r}\cdot\nabla\omega)$ дает

$$\langle\mathbf{P}\rangle=\frac{c^2}{2\tau}\left\{-\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}t+\mathbf{r}\cdot\left(\nabla\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right)\times\right.$$
$$\times\left(\nabla A+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\nabla A+\nabla\frac{\partial A}{\partial t}t\right)+\left(A_0+\mathbf{r}\cdot\nabla A+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2 A+\frac{\partial A}{\partial t}t+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\mathbf{r}\cdot\left(\nabla\frac{\partial A}{\partial t}\right)t\right)^2\left(\omega+\mathbf{r}\cdot\nabla\omega+\frac{\partial\omega}{\partial t}t\right)\left(\mathbf{k}+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{k}-\nabla\omega t\right)\right\}\tag{5.13}$$

и

$$\langle W\rangle=\frac{1}{4\tau}\left\{\left(\varepsilon_0+\mathbf{r}\cdot\nabla\varepsilon_0+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\varepsilon_0\right)\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}t+\mathbf{r}\cdot\left(\nabla\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right)^2+\right.$$
$$\left.+c^2\left(\nabla A+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\nabla A+\left(\nabla\frac{\partial A}{\partial t}\right)t\right)^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{4\tau}\left(A_0+\mathbf{r}\cdot\nabla A+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2A+\frac{\partial A}{\partial t}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}t^2+\right.$$

$$\left.+\mathbf{r}\cdot\left(\nabla\frac{\partial A}{\partial t}\right)t\right)^2\left\{\left(\varepsilon_0+\mathbf{r}\cdot\nabla\varepsilon_0+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\varepsilon_0\right)\left(\omega+\mathbf{r}\cdot\nabla\omega+\frac{\partial\omega}{\partial t}t\right)^2+\right.$$

$$\left.+c^2(\mathbf{k}+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{k}-\nabla\omega t)^2+\left(\omega_M+\mathbf{r}\cdot\nabla\omega_M+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\nabla)^2\omega_M\right)\right\}. \quad (5.14)$$

Здесь мы пренебрегли членами высших порядков, возникшими в процессе интегрирования.

Вектор групповой скорости в $\mathbf{R}_0$, T_0 и окрестности выражается формулами (5.11), (5.13) и (5.14).

В точке $\mathbf{R}_0$, T_0 он имеет вид:

$$\mathbf{V}_g=c^2\frac{\omega\mathbf{k}-(\partial A/\partial t)\nabla A/A_0^2}{\varepsilon_0\omega^2+0.5\{\varepsilon_0(\partial A/\partial t)^2+c^2(\nabla A)^2\}/A_0^2}. \quad (5.15)$$

Если в (5.15) отбросить члены порядка $O(\chi^2)$, мы получим формулу, совпадающую с (5.7):

$$\mathbf{V}_g=c^2\frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0\omega}.$$

Выбирая t в качестве независимой переменной и принимая во внимание что

$$\frac{dt}{dt}=1;\quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{V}_g=c^2\frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0\omega},$$

найдем производную вектора групповой скорости:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt}=-\frac{c^2}{2\varepsilon_0^2}\left(1-\frac{\omega_M}{\varepsilon_0\omega^2}\right)\nabla\varepsilon_0-\frac{c^2}{2\varepsilon_0^2\omega^2}\left(1-\frac{\omega_M}{\varepsilon_0\omega^2}\right)\nabla\omega_M+$$

$$+\frac{c^4\omega_M}{\varepsilon_0^3\omega^4}(\mathbf{k}\cdot\nabla)\mathbf{k}-\frac{c^2\omega_M}{\varepsilon_0^2\omega^3}\nabla\omega. \quad (5.16)$$

Здесь мы пренебрегли членами порядка $O(\chi^2)$.

§ 5. Модели поля

Начнем со стандартной модели поля. Будем рассматривать общий случай стационарной неоднородной среды для волны, имеющей как поперечную, так и продольную частотную модуляцию.

Пусть вектор **k** в точке X_0, Y_0, T_0 направлен вдоль оси x. Такое направление выбрано только из желания упростить формулы и не влияет на общность результата. В этой точке определим центральную частоту ω, частотный градиент (модуляцию) $\nabla\omega = \mathbf{e}_x(\partial\omega/\partial x) + \mathbf{e}_y(\partial\omega/\partial y)$, производную $\partial k_y/\partial y$, задающую расходимость лучей, а также параметры среды: ε_0, ω_M и $\nabla\varepsilon_0 = \mathbf{e}_x(\partial\varepsilon_0/\partial x) + \mathbf{e}_g(\partial\varepsilon_0/\partial y)$, $\nabla\omega_M = \mathbf{e}_x(\partial\omega_M/\partial x) + \mathbf{e}_y(\partial\omega_M/\partial y)$.

В стандартной ПВГО остальные параметры поля определяются из уравнений (5.3), (5.8) и (5.9). Так, величина продольного волнового вектора k_x следует из (5.3):

$$k_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_M}{c^2}}.$$

Из (5.8) определяются производные вектора **k**:

$$\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial x} = \mathbf{e}_x\left(\frac{\varepsilon_0\omega}{c^2k_x}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\omega^2}{2c^2k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x} - \frac{1}{2c^2k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial x}\right) +$$

$$+\mathbf{e}_y\left(\frac{\varepsilon_0\omega}{c^2k_x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\omega^2}{2c^2k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2c^2k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial y}\right).$$

Из условия $\nabla \times \mathbf{k} = 0$ следует $\partial k_x/\partial y = \partial k_y/\partial x$:

$$\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial y} = \mathbf{e}_x\left(\frac{\varepsilon_0\omega}{c^2k_x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\omega^2}{2c^2k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2c^2k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial y}\right) + \mathbf{e}_y\frac{\partial k_y}{\partial y}.$$

Уравнение (5.9) определяет производную $\partial\omega/\partial t$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{c^2k_x}{\varepsilon_0\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

Разложение Тейлора фазовой функции Ψ в $(X_0 + x)$, $(Y_0 + y)$, $(T_0 + t)$ записывается как

$$\Psi = \Psi_0 + k_x x + \frac{1}{2}\frac{\partial k_x}{\partial x}x^2 + \frac{\partial k_y}{\partial x}\frac{\partial k_x}{\partial y}yx + \frac{1}{2}\frac{\partial k_y}{\partial y}y^2 -$$

$$-\omega t - \frac{\partial\omega}{\partial x}xt - \frac{\partial\omega}{\partial y}yt - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial t}t^2. \tag{5.17}$$

Амплитудная функция A является линейной функцией x и t:

$$A = A_0 + \frac{\partial A}{\partial x}x + \frac{\partial A}{\partial t}t. \tag{5.18}$$

В точке X_0, Y_0, T_0 мы определим A_0 и одну из ее производных. Определяя, например, $\partial A/\partial x$, другую производную $\partial A/\partial t$ находим из уравнения переноса (5.4):

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{c^2}{2\varepsilon_0\omega}\left(\frac{\partial k_x}{\partial x}+\frac{\partial k_y}{\partial y}+\frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)A_0-\frac{c^2k_x}{\varepsilon_0\omega}\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{5.19}$$

Теперь мы оценим погрешность этой модели, для чего подставим функцию поля $U = A\exp(i\Psi)$, где A и Ψ заданы выражениями (5.17) и (5.18), в уравнения (1.1а), (1.2а), после чего получим уравнение невязки.

Анализируя разницу между точным и модельным решениями, видно, что максимальная ошибка в описании поля определяется линейным членом с y:

$$-2\left(\frac{\varepsilon_0\omega}{c^2}\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\omega^2}{2c^2}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial y}-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial\omega_M}{\partial y}\right)Ay=0.$$

Теперь модифицируем стандартную модель, введя в нее плавную поперечную функцию амплитуды $A_1(y)$, которая скомпенсирует систематичесую ошибку стандартной ПВГО. Эта функция описывается уравнением Эйри:

$$\frac{\partial^2A_1}{\partial y^2}-2\left(\frac{\varepsilon_0\omega}{c^2}\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\omega^2}{2c^2}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial y}-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial\omega_M}{\partial y}\right)A_1y=0.$$

Для преобразования стандартной модели в модифицированную нужно просто из фазовой функции (5.17) исключить производную $\partial k_y/\partial x$.

В новой модели поля фазовая функция Ψ_1 принимает вид:

$$\Psi_1=\Psi_0+k_xx+\frac{1}{2}\frac{\partial k_x}{\partial x}x^2+\frac{\partial k_x}{\partial y}yx+\frac{1}{2}\frac{\partial k_y}{\partial y}y^2-$$

$$-\omega t-\frac{\partial\omega}{\partial x}xt-\frac{\partial\omega}{\partial y}yt-\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial t}t^2. \tag{5.20}$$

Остальные соотношения между частными производными фазы останутся прежними:

$$\frac{\partial k_x}{\partial x}=\frac{\varepsilon_0\omega}{c^2k_x}\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\omega^2}{2c^2k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}-\frac{1}{2c^2k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial x}; \tag{5.8a}$$

$$\frac{\partial k_x}{\partial y}=\frac{\varepsilon_0\omega}{c^2k_x}\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\omega^2}{2c^2k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial y}-\frac{1}{2c^2k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial y}; \tag{5.8b}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{c^2 k_x}{\varepsilon_0 \omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}. \tag{5.9a}$$

В новой модели поля, как и в стандартной, $d\omega/dt = 0$, поскольку из (5.6) следует

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + V_g \frac{\partial\omega}{\partial x},$$

а производная $\partial\omega/\partial t$ из (5.9a) выражается как

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -V_g \frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

Производная вектора групповой скорости для новой модели может быть получена из (5.16), когда мы подставим туда соотношения между производными (5.8a) и (5.8b) для фазовой функции (5.20):

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -\frac{c^2}{2\varepsilon_0^2}\nabla\varepsilon_0 + \frac{c^2\omega_M}{2\varepsilon_0^3\omega^2}\nabla_\perp\varepsilon_0 - \frac{c^2}{2\varepsilon_0^2\omega^2}\nabla\omega_M +$$

$$+\frac{c^2\omega_M}{2\varepsilon_0^3\omega^4}\nabla_\perp\omega_M - \frac{c^2\omega_M}{\varepsilon_0^2\omega^3}\nabla_\perp\omega.$$

Здесь последний член правой части описывает эффект дисперсионной рефракции, величина которого определяется величиной коэффициента поперечной частотной модуляции $\nabla_\perp\omega$ и дисперсионными свойствами среды, определяемыми параметром ω_M. Сравнение с формулой (5.10) показывает, что новая модель поля корректирует величину обычной рефракции.

Полная производная амплитуды A может быть получена непосредственно из уравнения переноса (5.4), принимая во внимание соотношение между производными (5.6):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{c^2 k_x}{\varepsilon_0\omega}\frac{\partial A}{\partial x}.$$

Подставляя значения частных производных (5.8a) и (5.9a) в уравнение переноса, получим:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{A_0}{2}\left[\frac{c^2}{\varepsilon_0\omega}\frac{\partial k_y}{\partial y} + \left(\frac{1}{k_x} - \frac{c^2 k_x}{\varepsilon_0^2\omega^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega}{2\varepsilon_0 k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x} - \frac{1}{2\varepsilon_0\omega k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial x}\right].$$

Ниже выпишем все полученные лучевые уравнения для новой модели поля:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{V}_g;$$

$$\mathbf{V}_g=c^2\frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0\omega};$$

$$\frac{d\omega}{dt}=0; \tag{5.21}$$

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt}=-\frac{c^2}{2\varepsilon_0^2}\nabla\varepsilon_0+\frac{c^2\omega_M}{2\varepsilon_0^3\omega^2}\nabla_\perp\varepsilon_0-\frac{c^2}{2\varepsilon_0^2\omega^2}\nabla\omega_M+$$

$$+\frac{c^2\omega_M}{2\varepsilon_0^3\omega^4}\nabla_\perp\omega_M-\frac{c^2\omega_M}{\varepsilon_0^2\omega^3}\nabla_\perp\omega;$$

$$\frac{dA}{dt}=-\frac{A_0}{2}\left[\frac{c^2}{\varepsilon_0\omega}\frac{\partial k_y}{\partial y}+\left(\frac{1}{k_x}-\frac{c^2k_x}{\varepsilon_0^2\omega^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega}{2\varepsilon_0k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}-\frac{1}{2\varepsilon_0\omega k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial x}\right].$$

Система уравнений (5.21) является замкнутой только для монохроматических волн. В общем случае, для модулированных волн, эта система не замкнута, т.е. с ее помощью нельзя построить лучи, основываясь только на начальных данных и параметрах среды, поскольку не определена полная производная $d(\partial\omega/\partial y)/dt$ вдоль луча, которая описывает изменение поперечной частотной модуляции. Для расчета амплитудной функции необходимо также знать полные призводные $d(\partial\omega/\partial x)/dt$ и $d(\partial k_y/\partial y)/dt$.

Рассмотрим один из возможных путей вычисления этих производных.

§ 6. Квазилучевая модель поля

Для упрощения записи последующих выкладок введем следующие обозначения:

$$K_x=\frac{\partial k_x}{\partial x};\quad K_y=\frac{\partial k_x}{\partial y};\quad D=\frac{\partial k_y}{\partial y};$$

$$\Omega_x=-\frac{\partial\omega}{\partial x};\quad \Omega_y=-\frac{\partial\omega}{\partial y};\quad \Omega_t=\frac{\partial\omega}{\partial t}.$$

Введя новую модель поля через фазовую функцию (5.20), мы обеспечили совпадение точного и модельного решения до квадратичных членов в действительной части и до линейных членов в мнимой части уравнения невязки.

Модифицируя эту модель, можно учесть и эти члены, если будем учитывать производные от K_x, K_y, D, Ω_x, Ω_y, Ω_t вдоль луча в рассматриваемой точке.

Модификация модели заключается в замене фазовой функции Ψ_1 (5.20) на функцию Ψ_2, где производные фазы рассматриваются не как константы, а как функции переменных x, t:

$$\Psi_2 = \Psi_0 + k_x x + \frac{1}{2}K_x(x,\ t)x^2 + K_y(x,\ t)yx + \frac{1}{2}D(x,\ t)y^2 - \omega t +$$

$$+\Omega_x(x,\ t)xt + \Omega_y(x,\ t)yt - \frac{1}{2}\Omega_t(x,\ t)t^2. \tag{5.22}$$

Значения величин K_x, K_y, D, Ω_x, Ω_y, Ω_t в точке X_0, Y_0, T_0 и соотношения между ними (5.8a), (5.8b), (5.9a) остаются прежними. Прежними остаются и выражения (5.18) и (5.19) для амплитудной функции.

Подставляя новый анзатц $U = A\exp(i\Psi_2)$ в исходное волновое уравнение и выделяя действительную часть, получим уравнение невязки между точным и приближенным решением:

$$-A\left(k_x + \frac{1}{2}\frac{\partial K_x}{\partial x}x^2 + K_x x + \frac{\partial K_y}{\partial x}xy + K_y y + \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x}y^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \Omega_x}{\partial x}xt + \Omega_x t + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x}yt - \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_t}{\partial x}t^2\right)^2 - A(K_y x + Dy + \Omega_y t)^2 +$$

$$+A\frac{1}{c^2}\left(\varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x}x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2}y^2 + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y}xy\right)\times$$

$$\times\left(-\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial K_x}{\partial t}x^2 + \frac{\partial K_y}{\partial t}xy + \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial t}y^2 +\right.$$

$$+\frac{\partial \Omega_x}{\partial t}xt + \Omega_x x + \frac{\partial \Omega_y}{\partial t}yt + \Omega_y y -$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_t}{\partial t}t^2 - \Omega_t t\right)^2 - A\frac{1}{c^2}\left(\omega_M + \frac{\partial \omega_M}{\partial x}x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega_M}{\partial x^2}x^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \omega_M}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega_M}{\partial y^2}y^2 + \frac{\partial^2 \omega_M}{\partial x \partial y}xy\right)^2 = 0. \tag{5.23}$$

Линейные члены здесь уже отсутствуют в силу (5.20). Теперь мы запишем условия, когда квадратичные члены обращаются в нуль.

Коэффициент при y^2 приводит к уравнению:

$$-k_x \frac{\partial D}{\partial x} - K_y^2 - D^2 - \frac{\varepsilon_0 \omega}{c^2} \frac{\partial D}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_0}{c^2} \Omega_y^2 - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 \omega_M}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} = 0. \tag{5.24}$$

Для коэффициента при переменных xt имеем

$$-k_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - K_x \Omega_x - K_y \Omega_y - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \Omega_x \Omega_t = 0. \tag{5.25}$$

Для коэффициента при переменных yt имеем

$$-k_x \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} - K_y \Omega_x - D\Omega_y - \frac{\varepsilon_0 \omega}{c^2} \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \Omega_y \Omega_t = 0. \tag{5.26}$$

Из уравнений (5.24)–(5.26) можно достаточно просто получить полную производную вдоль луча для Ω_x, Ω_y, D, используя связь между производными (5.6).

Действуя таким образом, получим:

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{c^2}{\varepsilon_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{2c^2 k_x} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2c^2 k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2\varepsilon_0 \omega} \frac{\partial^2 \omega_M}{\partial y^2} +$$

$$+ \frac{\omega}{2\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} - \frac{\omega_M}{\omega(\varepsilon_0 \omega^2 - \omega_M)} \Omega_y^2 +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_0 \omega^2 - \omega_M} \left(\omega^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} - \frac{\partial \omega_M}{\partial y} \right) \Omega_y - \frac{c^2}{\varepsilon_0 \omega} D^2; \tag{5.24a}$$

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{1}{k_x} \Omega_y^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_0 k_x} - \frac{c^2 k_x}{\varepsilon_0 \omega^2} \right) \Omega_x^2 -$$

$$-\left(\frac{\omega}{2\varepsilon_0 k_x} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} - \frac{1}{2\varepsilon_0 \omega k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial x} \right) \Omega_x -$$

$$-\left(\frac{\omega}{2\varepsilon_0 k_x} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2\varepsilon_0 \omega k_x} \frac{\partial \omega_M}{\partial y} \right) \Omega_y; \tag{5.25a}$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt}=\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\omega k_x}\frac{\partial\omega_M}{\partial y}-\frac{\omega}{2\varepsilon_0 k_x}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial y}\right)\Omega_x-$$

$$-\frac{c^2}{\varepsilon_0\omega}\Omega_y D+\left(\frac{1}{k_x}-\frac{c^2 k_x}{\varepsilon_0\omega^2}\right)\Omega_x\Omega_y. \qquad (5.26а)$$

§ 7. Обсуждение результатов

Итак, мы получили замкнутую систему лучевых уравнений для сред с произвольным законом частотной дисперсии и убедились в том, что выводы о существовании эффекта дисперсионной рефракции, сделанные нами при исслледовании уравнения Клейна–Гордона, справедливы для всех типов диспергирующих сред.

Описанный выше способ получения полных производных D, Ω_x, Ω_y уже выходит за рамки геометрической оптики, поскольку учитывает не только первую и вторую, но также и третью производную фазовой функции. Здесь мы учитываем эффекты второго порядка малости $O(\chi^2)$, которые можно отнести к дифракционным (рефракционные, или геометрооптические, явления имеют первый порядок малости $O(\chi)$).

Но, вообще говоря, то же самое делается и в классической геомоптике, когда амплитуда определяется по расходимости лучевой трубки, а это также есть учет третьей производной фазовой функции.

Мы назвали нашу последнюю модель квазилучевой, поскольку решение для D, Ω_x, Ω_y сведено к полным производным по t вдоль луча, как и для остальных параметров волнового поля.

Уравнения (5.21), дополненные уравнениями (5.24а), (5.25а) и (5.26а), представляют собой замкнутую систему лучевых уравнений для волн с частотной модуляцией. Для описания монохроматических волн достаточно уравнений (5.21).

Из (5.25а) и (5.26а) следует, что продольная и поперечная частотные модуляции могут трансформироваться друг в друга, что отмечалось и ранее [62, 72]. Однако, если трансформация поперечной модуляции в продольную наблюдается даже в однородной среде, то обратная трансформация требует наличия поперечной неоднородности среды. Это говорит о том, что для волновых пакетов с продольной модуляцией, излучаемых обычными антеннами и распространяющихся в неоднородной среде с частотной дисперсией, возникают условия для появления эффекта дисперсионной рефракции.

Все полученные в главе 5 результаты, как нетрудно видеть, совпадают с аналогичными результатами для УКГ в части лучевой модели и верны для УКГ в части квазилучевой модели, если в обобщенных формулах положить $\varepsilon_0 = 1$, $\omega_M = \omega_L^2$.

Близость структуры лучевых уравнений, полученных для произвольного закона частотной дисперсии, к аналогичным уравнениям, полученным ранее для УКГ, физически объясняется тем, что сама по себе геометрическая оптика является коротковолновым приближением, а уравнение Клейна–Гордона является асимптотическим для всех видов частотной дисперсии при повышении частоты (уменьшении длины волны).