Глава 1

Исходные волновые уравнения и некоторые точные их решения

§ 1. Волновые уравнения

В общем виде волновое уравнение для скалярной функции поля $U(\mathbf{r}, t)$ в неоднородной среде с частотной дисперсией записывается как [2, 16, 40, 46]

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{L(U)\} = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь линейный интегральный оператор $L(U)$ имеет вид:

$$L(U) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, t-\tau) U(\mathbf{r}, \tau) d\tau. \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) определяет закон дисперсии среды, в которой волновое поле зависит от своих значений в предыдущие моменты времени $\tau \le t$. Для $(t-\tau) < 0$ ядро $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, t-\tau)$ обращается в нуль в силу принципа причинности.

Если $U(\mathbf{r}, t)$ является решением уравнения (1.1), то каждая спектральная компонента поля

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{r}, t)\exp(i\omega t) dt \qquad (1.3)$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon u = 0, \qquad (1.4)$$

где функция $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ определяется как преобразование Фурье ядра $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},t)$:

$$\varepsilon(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},t)\exp(i\omega t)dt. \tag{1.5}$$

Здесь нижний предел интегрирования задан нулевым, поскольку функция $\tilde{\varepsilon}$ имеет нулевые значения для $t<0$.

Функции $U(\mathbf{r},\ t)$ и $u(\mathbf{r},\ \omega)$ связаны между собой обратным преобразованием Фурье

$$U(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{r},\omega)\exp(-i\omega t)d\omega.$$

Если частотная дисперсия в среде отсутствует, что соответствует сингулярному ядру

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_0(\mathbf{r})\delta(t-\tau),$$

то волновое уравнение (1.1) превращается в уравнение Даламбера

$$\nabla^2 U-\frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0. \tag{1.6}$$

В этом случае функция $\varepsilon(\mathbf{r},\ \omega)=\varepsilon_0(\mathbf{r})$ в уравнении Гельмгольца (1.4) не зависит от частоты.

Другой частный случай обобщенного уравнения (1.1) – это уравнение Клейна–Гордона (УКГ):

$$\nabla^2 U-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\omega_L^2}{c^2}U=0, \tag{1.7}$$

которому соответствует ядро $\tilde{\varepsilon}$ в (1.2)

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},t)=\delta(t)-\frac{\omega_L(\mathbf{r})}{t}J_1[\omega_L(\mathbf{r})t], \tag{1.8}$$

частотно-зависимая диэлектрическая проницаемость ε в (1.5)

$$\varepsilon(\mathbf{r},\omega)=1-\frac{\omega_L^2(\mathbf{r})}{\omega^2}. \tag{1.9}$$

и дисперсионное соотношение

$$\omega^2=\omega_L^2+k^2c^2. \tag{1.10}$$

Здесь ω – круговая частота плоской однородной монохроматической волны, ω_L – собственная круговая частота внутренних осцилляторов среды, k – волновое число, c – скорость волны в свободном пространстве (при $\omega_L = 0$). Скорость c является константой для конкретного типа волнового движения и не зависит от среды. Для электромагнитных волн это скорость света в вакууме. Свойства среды распространения задаются через распределение по пространству параметра ω_L. Мы остановимся на этом уравнении более подробно, поскольку бóльшая часть монографии связана именно с его решениями.

Уравнение (1.7) встречается в литературе также под названиями "уравнение Клейна–Гордона–Фока" и "линеаризованное синус-уравнение Гордона". УКГ описывает широкий класс волновых процессов, начиная от механических и кончая квантовомеханическими. Общее свойство всех разнородных волновых процессов, описываемых уравнением Клейна–Гордона, заключается в том, что в среде существует "возвращающая сила", пропорциональная возмущению и противоположная ему по знаку. В частности, УКГ используется для описания малых механических колебаний системы связанных маятников (большие колебания описываются синус-уравнением Гордона). Условие малости колебаний выражается в возможности замены $\sin U$ на U. В этом случае ω_L – собственная частота маятников [2, 9]. Уравнение (1.7) описывает распространение электромагнитных волн в металлических волноводах, здесь параметр ω_L соответствует критической частоте волновода. В квантовой механике УКГ используется для описания скалярного (псевдоскалярного) поля, соответствующего бесспиновым частицам (например, псевдоскалярным π-мезонам). Кроме того, уравнение Клейна–Гордона является асимптотическим для всех типов дисперсии электромагнитных волн при повышении частоты ω. Это становится понятным, если учесть, что при повышении частоты волна взаимодействует только с наименее инерционными носителями заряда – электронами, образующими "упругий электронный газ" (например, в рентгеновском диапазоне электромагнитных волн) [13, 14].

Но, вероятно, наиболее широко УКГ используется в разделе радиофизики, связанном с распространением коротких (декаметровых) радиоволн (3–30 мГц) в ионосфере Земли. В последнем случае скалярная функция U рассматривается как компонента электрического вектора $\mathbf{E}$, а ω_L имеет смысл ленгмюровской частоты электронов ионосферной плазмы. Иногда ω_L называют критической частотой плазмы. Уравнение (1.7) описывает распространение волн без учета замагниченности плазмы (магнитного поля Земли) на частотах, когда движением ионов можно пренебречь.

В физике плазмы этот тип волн называется ленгмюровским. "Ленгмюровские волны возникают при нарушении квазинейтральности плазмы, т.е. при смещении электронов относительно ионов. Возникающее при этом электрическое поле создает квазиупругую силу, которая стремится возвратить электроны в положение равновесия. Так как электроны значительно легче ионов, то колебания электронов под действием этой квазиупругой силы происходит при практически неподвижных ионах" [7].

Представим ядро $\tilde{\varepsilon}$ интегрального оператора (1.2) в виде

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0(\mathbf{r})\delta(t) + h(\mathbf{r},t). \tag{1.11}$$

Такое представление даст нам возможность в дальнейшем различать чисто волновые эффекты, связанные с δ-функцией, и чисто дисперсионные эффекты, связанные с h-функцией, определяющей частотную дисперсию.

Перепишем исходное волновое уравнение (1.1) с учетом представления (1.11):

$$\nabla^2 U - \frac{\varepsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}M(U) = 0, \tag{1.1a}$$

где

$$M(U) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t-\tau)U(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\tau)U(t-\tau)d\tau. \tag{1.2a}$$

Получим для волнового уравнения (1.1a) уравнение баланса энергии в соответствии с методикой, описанной в [9, 11]. С этой целью умножим (1.1a) на производную dU/dt и запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial U}{\partial t}(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\tau-\sigma)U(\sigma)d\sigma\right) -$$
$$- c^2\frac{\partial U}{\partial t}\nabla^2 U = 0. \tag{1.12}$$

Затем прибавим к левой части (1.12) член

$$c^2\nabla U\frac{\partial(\nabla U)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{2}(\nabla U)^2\right)$$

и вычтем его же. Легко видеть, что

$$-c^2\frac{\partial U}{\partial t}\nabla^2 U - c^2\nabla U\frac{\partial(\nabla U)}{\partial t} = -c^2\nabla\left(\frac{\partial U}{\partial t}\nabla U\right).$$

Следовательно, уравнение баланса энергии для (1.1a) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

где

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2}(\nabla U)^2 + \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial U}{\partial t}(\tau)d\tau \int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\tau - \sigma)U(\sigma)d\sigma \tag{1.13}$$

– плотность энергии волнового поля, и

$$\mathbf{P} = -c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \nabla U \tag{1.14}$$

– плотность потока энергии.

Аналогичным способом получим уравнение баланса энергии для уравнения Клейна–Гордона (1.7), т.е. умножим его на производную dU/dt и перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_L^2 U^2\right) - c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \nabla^2 U = 0. \tag{1.12a}$$

Проделав описанные выше операции, которые мы применили для общего случая произвольной дисперсии, найдем, что плотность потока энергии выражается той же формулой (1.14), а плотность энергии выражается более простой формулой

$$W = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + c^2(\nabla U)^2 + \omega_L^2 U^2\right\}. \tag{1.15}$$

В следующих параграфах мы рассмотрим ряд точных решений уравнения Клейна–Гордона, которые очень интересны с точки зрения физики волновых процессов в диспергирующих средах.

§ 2. Неискаженная передача сигналов в диспергирующей среде

Для уравнения (1.7) существует точное решение в виде неоднородной плоской волны

$$U = A_0 \exp(-py)\exp\{i(\omega t - kx)\}, \tag{1.16}$$

для которой параметр затухания p, круговая частота ω и волновое число k связаны дисперсионным соотношением для неоднородных волн

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2} + p^2. \tag{1.17}$$

В частном случае, когда $p = \omega_L/c$, т.е. при согласовании параметра затухания p с параметром ω_L однородной среды, уравнение (1.17) совпадает с дисперсионным уравнением для однородных волн в свободном пространстве

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Таким образом, волновая функция, представимая в виде суперпозиции неоднородных волн (1.16) с $p = \omega_L/c$, распространяются в среде с частотной дисперсией, описываемой уравнением Клейна–Гордона, без дисперсионных искажений. Действительно, пусть

$$U = F(ct \pm x)\exp\{-py\}, \tag{1.18}$$

где F – произвольная функция аргумента $ct \pm x$ и $p = \omega_L/c$. Подстановка (1.18) в (1.16) приводит к тождественному равенству. Отметим, что для согласованных неоднородных волн не существует явления " отсечки" низкочастотных спектральных компонент с $\omega < \omega_L$, как это имеет место для однородных волн.

Для некоторых типов волн с более сложной зависимостью затухания вдоль поперечной координаты y, чем (1.16), можно найти неоднородную среду, в которой волновая функция, представимая в виде разложения по соответствующим монохроматическим неоднородным волнам, распространяется в диспергирующей среде без искажений.

Например, если

$$U = F(ct \pm x)\exp\{\beta y^2\}, \tag{1.19}$$

то согласованный с волной профиль ω_L имеет вид

$$\omega_L^2 = c^2(2\beta + 4\beta^2 y^2).$$

Если волновая функция имеет вид

$$U = F(ct \pm x)\exp\{py + \gamma y^3\}, \tag{1.20}$$

то согласованный профиль выглядит как

$$\omega_L^2 = c^2(p^2 + 6\gamma y + 6p\gamma y^2 + 9\gamma^2 y^4).$$

Однако легко показать, что не существует гладких (с непрерывной первой производной), ограниченных на всей оси y функций поля, которые можно было бы согласовать с профилем ω_L. Докажем это утверждение от противного. Предположим, что такая функция $f(y)$ существует. Тогда волновое поле можно представить как

$$U = F(ct \pm x) f(y). \tag{1.21}$$

Подставляя U в УКГ, получим условие согласования

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{1}{f} = \frac{\omega_L^2}{c^2}.$$

На функцию $f(y)$ накладываются следующие требования:

1) $(\partial^2 f / \partial y^2) / f \geq 0$, поскольку ω_L^2 не может иметь отрицательных значений;

2) $|f(y)| < c_1$, т.е. функция $f(y)$ должна быть ограничена на всей оси y. Здесь c_1 – произвольное положительное число.

Поскольку случай $f(y)$ = const нас не интересует, функция должна иметь хотя бы один экстремум.

Рассмотрим три возможных варианта.

1. Пусть $f(y_m)$ – максимум, $f(y_m) > 0$. Тогда $\partial^2 f / \partial y^2 < 0$ и условие 1 не выполняется.

2. Пусть $f(y_m)$ – минимум, $f(y_m) < 0$. Тогда $\partial^2 f / \partial y^2 > 0$, что тоже ведет к невыполнению условия 1.

3. Пусть $f(y_m)$ – максимум, $f(y_m) \leq 0$ или $f(y_m)$ – минимум, $f(y_m) \geq$ ≥ 0, тогда из условия 2 должна существовать точка перегиба, в которой $\partial^2 f / \partial y^2$ меняет знак, что также приводит к невыполнению условия 1.

Таким образом, предположение о возможности существования гладкой ограниченной функции затухания приводит к противоречию.

Реально волновая структура типа (1.18) может существовать в виде поверхностной волны, поэтому свойство согласованных неоднородных волн передавать сигналы без искажения можно использовать для создания бездисперсных волноводов, способных работать на частотах $\omega < \omega_L$. Примером такого волновода для электромагнитных волн может служить импедансная поверхность, находящаяся в однородной плазме.

Пусть волноводная поверхность располагается в плоскости $y = 0$. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в полупространстве $y > 0$ зададим как

$$E_z = E_0 \exp(-py) \exp\{i(\omega t - kx)\}. \tag{1.22}$$

В этом случае магнитное поле будет иметь составляющие H_x и H_y, которые определяются формулами [22, 23, 35]:

$$H_x = -\frac{ip}{\omega\mu_0} E_0 \exp(-py)\exp\{i(\omega t - kx)\}; \tag{1.23}$$

$$H_y = \frac{1}{\omega\mu_0} E_0 \exp(-py)\exp\{i(\omega t - kx)\}, \tag{1.24}$$

где μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость.

Для того чтобы неоднородная волна (1.22)–(1.24) существовала, необходимо, чтобы импеданс поверхности удовлетворял условию

$$Z = \frac{E_z}{H_x} = i\frac{\omega\mu_0}{p} = i\frac{\omega\mu_0 c}{\omega_L}. \tag{1.25}$$

Из (1.25) следует, что импеданс должен быть чисто реактивным.

Отметим, что неоднородные волны, имеющие дифракционную природу, в бездисперсной среде ($\omega_L = 0$) обладают частотной дисперсией, причем их фазовая скорость всегда меньше c. В свою очередь, фазовая скорость однородных волн в диспергирующей среде всегда больше c. Неоднородные волны в диспергирующей среде могут иметь произвольную фазовую скорость от 0 до ∞, включая c. В последнем случае происходит полная компенсация эффектов дисперсии и дифракции.

§ 3. Круговые стационарные волны

Неоднородная стационарная волна

$$U(r,\phi) = r^n \exp\{i(\omega t - k_\phi \phi)\} \tag{1.26}$$

при выполнении условий $\omega = \omega_L$ и $k_\phi = \pm n$ удовлетворяет уравнению (1.7), записанному в цилиндрической системе координат r, ϕ, z [24]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\omega_L^2}{c^2}U = 0. \tag{1.7a}$$

Формула (1.26) описывает стационарную волну в однородной среде, вращающуюся вокруг центра $r = 0$ с угловым волновым числом $k_\phi = \pm n$. Случай $k_\phi = n = 0$ следует исключить, поскольку при этом отсутствует волновое движение.

Возможность существования в однородной среде замкнутой неоднородной волны, вращающейся вокруг некоторого центра, достаточно просто поясняется результатами, полученными в § 1. Очевидно, для существования такой волны необходимо, чтобы ее локальная фазовая скорость равнялась нулю в центре и линейно возрастала по радиусу. При этом локальный коэффициент затухания p_L должен изменяться от ∞ до 0 при изменении расстояния от 0 до ∞ и $\omega = \omega_L$.

Легко убедиться, что таким свойством обладает коэффициент затухания локально-плоской неоднородной волны, в виде которой можно представить (1.26):

$$U(r,\phi) = r^n \exp\{i(\omega t - k_\phi \phi)\} = \exp(p_L r)\exp\{i(\omega t - k_\phi \phi)\};$$

$$p_L = n\frac{\ln r}{r}.$$

Волны типа (1.26) имеют особенность либо в нулевой точке координат (при $n < 0$), либо на бесконечности (при $n > 0$). Поскольку рассматриваемый волновой процесс существует только при $\omega = \omega_L$, в качестве приложения при $n < 0$ его можно использовать в открытых резонаторах для определения электронной концентрации плазмы.

Как и в предыдущем случае, неоднородная волна (1.26) может существовать в виде поверхностной волны над импедансной границей. Введем цилиндрическую систему координат и рассмотрим в качестве границы поверхность цилиндра, расположенного вдоль оси z. Пусть напряженность электрического поля E_z в пространстве $r \geq r_0$, где r_0 – радиус цилиндра, задается как

$$E_z = E_0 r^n \exp\{i(\omega t - n\phi)\}.$$

При этом магнитное поле будет иметь составляющие H_r и H_ϕ:

$$H_r = \frac{n}{\omega\mu_0} E_0 r^{n-1} \exp\{i(\omega t - n\phi)\};$$

$$H_\phi = -\frac{in}{\omega\mu_0} E_0 r^{n-1} \exp\{i(\omega t - n\phi)\}.$$

Как и в предыдущем случае, импеданс поверхности имеет чисто реактивный характер:

$$Z = i\frac{\omega\mu_0 r_0}{n}.$$

Поверхностные структуры с необходимыми свойствами, как для волновода, так и для резонатора, могут быть выполнены либо в виде ребристой металлической поверхности, либо в виде слоя диэлектрика на металлической подложке [22, 23, 35, 70].

Далее покажем, что вращающаяся замкнутая волна без особенностей может существовать и без волноводных поверхностей в неоднородной среде распространения. Для этого решение уравнения (1.7а) будем искать в виде

$$U = A(r)\exp\{i(\omega t - k_\phi \phi)\}. \tag{1.27}$$

Неоднородную среду представим как

$$\omega_L^2 = \omega_{L0}^2\{1 + F(r)\}. \tag{1.28}$$

Для ее физической реализуемости необходимо потребовать $F(r) \geq -1$.

Подставляя (1.27) и (1.28) в (1.7а), получим связь между параметрами волны и среды

$$F(r) = \frac{c^2}{\omega_{L0}^2}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}A^{-1} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}A^{-1} - \frac{k_\phi^2}{r^2}\right\}. \tag{1.29}$$

Задавая, например, распределение амплитуды $A(r)$ как

$$A(r) = A_0\frac{r}{1+r^2},$$

легко убедиться, что волна существует при

$$k_\phi = 1;$$

$$\frac{c^2}{\omega_{L0}^2} = 0.125;$$

$$F(r) = -\frac{1}{(1+r^2)^2}.$$

Для плазмы это означает, что неоднородность должна иметь цилиндрическую симметрию с понижением электронной концентрации в центре.

§ 4. Обсуждение результатов

Приведенные выше точные решения УКГ позволяют сделать следующие выводы.

1. Любая поперечная неоднородность поля (кроме линейной функции, имеющей везде нулевую вторую производную) "про-

светляет" плазму, уменьшая частоту "отсечки" ω_L (1.17). Этот факт может оказаться интересным при разработке способов связи с космическим аппаратом, окруженным во время спуска экранирующим слоем плазмы.

2. Любая поперечная неоднородность поля (кроме линейной функции) изменяет фазовую скорость $V_p = \omega / k$. Эти изменения могут иметь масштаб как дифракционных, так и рефракционных эффектов. Например, в волне (1.18) происходит компенсация дисперсионных эффектов дифракционными, что позволяет передавать сигналы в плазме со скоростью света без искажений.

В волне (1.19) и (1.20) происходит компенсация рефракционных эффектов за счет поперечной неоднородности амплитуды поля. Действительно, если, например, в (1.19) положить $1/\beta \gg \lambda$ (здесь λ – характерная длина волны), то мы будем иметь плавнонеоднородную среду с пространственными масштабами, соответствующими масштабам рефракционных явлений. Стандартный вариант пространственно-временной геометрической оптики основан на локально-плоской однородной модели волны. В этой ситуации будет ошибочно указывать на наличие рефракции, в то время как точное решение говорит об ее полном отсутствии и равенстве фазовой и групповой скоростей скорости света c.

Примеры (1.19) и (1.20) свидетельствуют о том, что стандартная локально-плоская однородная модель волны не может быть использована для строгого описания рефракции, поскольку в ряде случаев дает ошибку, по своей величине равную масштабам рефракционных явлений. В модели поля для полного описания рефракции должен, по крайней мере, присутствовать некоторый параметр, определяющий поперечную неоднородность волнового поля. Этот параметр должен входить и в показатель преломления n.

3. Наряду с волнами, распространяющимися от источника в бесконечность, в однородной диспергирующей среде существуют волны, у которых энергетический центр находится на месте, а каждый ее участок непрерывно меняет направление распространения. Точное решение (1.26) позволяет утверждать, что в однородной диспергирующей среде волна может поменять направление распространения на противоположное. Если волновое поле (1.26) рассечь плоскостью, проходящей вблизи точки $r = 0$, а на плоскости задать необходимые граничные условия, то в пространстве, не включающем в себя точку $r = 0$, будет существовать поле без особенностей. В этом примере волновая

энергия распространяется с одной стороны плоскости на другую, меняя направление на противоположное.

4. Использование эффекта вращающейся волны в открытом резонаторе для определения электронной концентрации ионосферной плазмы позволит не только определять значение концентрации вокруг датчика, но и оценивать влияние самого датчика на измеряемый параметр. Схема измерений может быть следующей: сигнал от генератора изменяющейся частоты подается на возбуждающие штыри резонатора. При совпадении частоты генератора с ω_L возникает волновой процесс и на приемных штырях появится сигнал. Переключая моды n круговой волны, можно локализовать энергию поля на различных расстояниях от датчика, а изменение частоты возбуждения резонатора будет говорить о степени неоднородности среды вокруг него.

5. Возможно, резонаторы с понижением электронной концентрации в центре типа (1.29) могут возникать на вытянутых вдоль магнитного поля Земли неоднородностях ионосферы.