Приложение 3.
Сравнение стандартной и модифицированной ПВГО с точным решением для монохроматических волн

Стандартный вариант ПВГО не учитывает эффект дисперсионной рефракции, что является составной частью его ошибки при описании рефракции волн. Но он также имеет систематическую ошибку и при описании рефракции монохроматических волн, т.е. при отсутствии эффекта дисперсионной рефракции. Причину обеих ошибок мы рассмотрели в Приложении 1.

Ниже мы рассмотрим вторую часть ошибки для монохроматических волн путем сравнения стандартной и модифицированной ПВГО с точным решением исходного волнового уравнения.

Пусть плазменная частота ω_L зависит только от высоты y как:

$$\begin{aligned} &\omega_L^2(y) = 0 \quad y < 0; \\ &\omega_L^2(y) = \beta y \quad y \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Такая функция среды позволяет получить точное решение уравнения Клейна-Гордона (1).

Решение в неоднородном полупространстве $y \geq 0$ будем искать виде:

$$U(x,y,t) = A(y) exp\left\{\left(\frac{\omega}{c}\cos\alpha\right)x - \omega t\right\} \tag{13}$$

Здесь α - угол распространения волны относительно горизонта.

Подставляя (13) в (1), для функции $A(y)$ получим:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left\{\frac{\beta y}{c^2} - \left(\frac{\omega}{c^2}\right)\sin^2\alpha\right\} A = 0 \tag{14}$$

Сделав замену переменных

$$\frac{\beta y}{c^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin^2\alpha = \eta \tag{15}$$

получим классический результат – уравнение Эйри.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta} - \left(\frac{c^2}{\beta}\right)^2 A\eta = 0 \qquad (16)$$

Его решением является функция Эйри, изображенная на рис. 19.

Это точное решение волнового уравнения для заданной модельной среды (12).

Теперь найдем лучи для стандартной и модифицированной ПВГО в той же среде.

Стандартная ПВГО для производной вектора групповой скорости имеет вид:

$$\frac{d\vec{V}_g}{dt} = -\frac{c^2\omega_L}{\omega^2}\nabla\omega_L \qquad (17)$$

Модифицированная ПВГО для монохроматического случая имеет один дополнительный член:

$$\frac{d\vec{V}_g}{dt} = -\frac{c^2\omega_L}{\omega^2}\nabla\omega_L + \frac{c^2\omega_L^3}{\omega^4}\nabla_\perp\omega_L \qquad (18)$$

На границе $y = 0$ групповая скорость $\vec{V}_g$ имеет компоненты $V_{0x} = c\cos\alpha$ и $V_{0y} = c\sin\alpha$.

Продольная компонента вектора групповой скорости V_x останется неизменной в силу независимости параметров среды от продольной координаты x, а поперечная компонента V_y для стандартной ПВГО будет меняться как

$$V_y(t) = V_{0y} - \int_0^t \frac{1}{2}\frac{c^2}{2\omega^2}\beta d\tau = c\sin\alpha - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\omega^2}\beta t \qquad (19)$$

Координата $y(t)$ луча зависит от t следующим образом:

$$y(t) = (c\sin\alpha)t - \frac{1}{4}\frac{c^2}{\omega^2}\beta t^2 \qquad (20)$$

Точка поворота луча, соответствующая максимальному значению координаты $y = y_{\max}$ определится из условия нулевой скорости $V_y(t_{\max}) = 0$.

Время $t_{\max}$, соответствующее точке прохождения координаты $y_{\max}$, следует из (19):

$$t_{\max} = 2\frac{\omega^2 \sin\alpha}{c\beta} \tag{21}$$

Подстановка (21) в (20) дает:

$$y_{\max} = \frac{\omega^2 \sin^2\alpha}{\beta} \tag{22}$$

При переходе от координаты от координаты y к координате η (15) получим:

$$\eta_{\max} = 0 \tag{23}$$

Таким образом, мы видим, что в стандартной ПВГО поворот луча происходит на высотах, соответствующих нулевому аргументу функции Эйри, вне зависимости от частоты ω и угла падения волны α.

Для модифицированного варианта ПВГО ситуация в значительной степени отличается. Дополнительный корректирующий член

$$\frac{c^2\omega_L^3}{\omega^4}\nabla_\perp\omega_L$$

содержит поперечную (в координатах луча) частную производную параметра среды ω_L. При вертикальном падении луча на среду $\nabla_\perp\omega_L = 0$, по этой причине лучи стандартного и модифицированного вариантов ничем не отличаются. В обоих случаях отражение происходит в точке с координатой $\eta = 0$.

При уменьшении угла α модифицированный луч постепенно будет проникать в область положительных аргументов η.

Для малых углов падения волны различие в поведении лучей будет максимальным. Вертикальная компонента групповой скорости для модифицированной ПВГО может быть описана в этом случае уравнениями:

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{c^2\beta}{\omega^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2\beta^2 y}{\omega^4} \tag{24}$$

$$V_y(t) = c\sin\alpha - \frac{1}{2}\frac{c^2\beta}{\omega^2}t + \frac{1}{2}\frac{c^2\beta^2 y}{\omega^4}t \tag{25}$$

$$y(t) = (c\sin\alpha)t - \frac{1}{4}\frac{c^2\beta}{\omega^2}t^2 + \frac{1}{4}\frac{c^2\beta^2 y}{\omega^4}t^2 \quad (26)$$

Совместное решение уравнений (25) и (26) дает значение максимальной высоты и времени прохождения ее лучом:

$$y_{\max} = \frac{\omega^2}{\beta} \quad (27)$$

$$t_{\max} = \frac{2\omega^2}{c\beta\sin\alpha} \quad (28)$$

Переходя к координате η, имеем:

$$\eta_{\max} = \frac{\omega^2}{c^2}(1-\sin^2\alpha) \quad (29)$$

Здесь, в отличие от стандартного варианта ПВГО, точка отражения зависит как от частоты ω, так и от угла падения α.

Напомним, в чем различие между двумя волновыми явлениями – рефракцией и дифракцией. Для квазимонохроматических волн рефракция – это малое изменение направления распространения по отношению к длине волны и медленное изменение по отношению к быстрым осцилляциям поля. В символьном виде это выражено в (6). Одновременно (6) является условием применимости ПВГО, поскольку эта асимптотика специально и создавалась для описания рефракционных эффектов. Остальные эффекты, не подпадающие под определение (6), относятся к дифракционным.

Воспроизведенное нами выше точное решение УКГ в виде функции Эйри справедливо для произвольного угла падения волны α на неоднородный слой. При вертикальном падении ($\alpha = \pi/2$) монотонно убывающая ветвь функции Эйри для $\eta > 0$ соизмерима с длиной волны и описывает дифракционное спадание поля в зависимости от вертикальной координаты. Здесь оба варианта ПВГО дают одинаковый результат, в физической правильности которого сомневаться не приходится: луч, описывающий рефракционные явления, поворачивает в точке с координатой $\eta = 0$.

Однако для малых углов падения α убывающая ветвь функции Эйри по своему пространственному масштабу может соответствовать сколь угодно большому числу волн при $\alpha \to 0$. В этом случае спадание поля для $\eta > 0$ является плавным на длине волны и относится к рефракционным явлениям.

Модифицированный вариант ПВГО отображает физику этого процесса тем, что при уменьшении угла падения волны луч начинает проникать в область $\eta > 0$, в то время как стандартный вариант никак не реагирует на изменение угла α. Рассмотренный пример говорит о наличии систематической ошибки в стандартном варианте ПВГО при описании рефракционных волновых процессов.

Приложение 4. Метод вывода уравнений модифицированной ПВГО

В пространственно-временной геометрической оптике, как в стандартной, так и в модифицированной, траектория пространственно-временного луча задается уравнением:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_g \tag{30}$$

Здесь $\vec{r}$ - пространственная координата (радиус-вектор) траектории луча, t - время, $\vec{V}_g$ – групповая скорость.

Групповая скорость – это средняя скорость передачи энергии волны за период ее осцилляции. Она связана с уравнением баланса энергии:

$$\vec{V}_g = \frac{<\vec{P}>}{<W>} \tag{31}$$

где для уравнения Клейна-Гордона (1):

$$\vec{P} = -c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \nabla U \tag{32}$$

– плотность потока энергии,

$$W = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + c^2(\nabla U)^2 + \omega_L^2 U^2\right\} \quad (33)$$

– плотность энергии.

Впервые связь групповой скорости с энергетическими характеристиками (31) была установлена Дж. У Рэлеем и О. Рейнольдсом в 1877 г.

В стандартной ПВГО групповая скорость определяется более простым способом, чем (31):

$$\vec{V}_g = \frac{d\omega}{d\vec{k}} \quad (34)$$

Определение (34) можно использовать только для плоской волны, где оно полностью эквивалентно определению (31). В стандартной ПВГО его использование ничему не противоречит, поскольку в этом случае модель поля (10)

$$U = A_0 \exp\left[i\left(k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x}x + \frac{\partial k_x}{\partial y}y\right)x + i\frac{\partial k_y}{\partial x}xy - i\left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x}x + \frac{\partial \omega}{\partial y}y\right)t\right]$$

как раз и представляет собой локально-плоскую однородную монохроматическую волну с медленно изменяющимися параметрами. Использование более общего определения (31) для производной вектора групповой скорости, определяющей явление рефракции, дает абсолютно тот же результат:

$$\frac{d\vec{V}_g}{dt} = -c^2\frac{\omega_L}{\omega}\nabla\omega_L \quad (35)$$

Но, как мы выяснили в Приложении 1, стандартная модель поля не удовлетворяет исходному волновому уравнению (1), поскольку имеет систематическую ошибку рефракционных масштабов (11):

$$-2\left(\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2}\frac{\partial\omega_L}{\partial y}\right)A_0 y$$

Для того, чтобы исключить ошибку (11), модифицируем модель (10) и введением вместо постоянной амплитуды A_0 плавно меняющуюся вдоль поперечной координаты амплитуду $A(y)$:

$$U = A(y)\exp\left[i\left(k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x}x + \frac{\partial k_x}{\partial y}y\right)x + i\frac{\partial k_y}{\partial x}xy - i\left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x}x + \frac{\partial \omega}{\partial y}y\right)t\right] \quad (36)$$

Подстановка измененной модели поля (36) и волновое уравнение (1) даст условие отсутствия ошибки:

$$\frac{d^2A}{dy^2} - 2\left(\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega_L}{c^2}\frac{\partial \omega_L}{\partial y}\right)Ay = 0 \quad (37)$$

Пусть условие (37) выполняется, тогда модифицированная модель поля, не имеющая систематической ошибки, будет иметь вид волны с плавной поперечной неоднородность, описываемой функцией Эйри (рис. 19), а выражение (36) в окрестности наблюдаемой точки будет эквивалентно:

$$U = A_0\exp\left[i\left(k_x + \frac{\partial k_x}{\partial x}x + \frac{\partial k_x}{\partial y}y\right)x - i\left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x}x + \frac{\partial \omega}{\partial y}y\right)t\right] \quad (38)$$

Модифицированная модель поля (38) отличается от стандартной (10) только отсутствием члена

$$i\frac{\partial k_y}{\partial x}xy$$

который является причиной ее систематической ошибки.

В модифицированной ПВГО он компенсируется функцией поперечной амплитуды поля.

При выводе уравнений модифицированной ПВГО, будем использовать общее определение групповой скорости (31).

Подставляя модифицированную модель [38] в [31-33], получим выражение групповой скорости в точке и ее окрестности. Если теперь это выражение продифференцировать по времени, учитывая, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_g; \qquad \frac{dt}{dt} = 1,$$

мы получим изменение групповой скорости вдоль луча:

$$\frac{d\vec{V}_g}{dt} = -c^2\frac{\omega_L}{\omega}\nabla\omega_L - c^2\frac{\omega_L^2}{\omega^3}\nabla_\perp\omega + c^2\frac{\omega_L^3}{\omega^4}\nabla_\perp\omega_L \qquad (39)$$

Выражение (39) задает траекторию луча в модифицированной ПВГО.